



不定积分

计算方法

夏日正好 不负骄阳



MathEnthusiast

不定积分

作者：卢鹏博

组织：汕头大学

时间：2024 年 12 月 12 日



MathEnthusiast

前言

微积分是数学中的璀璨明珠，而不定积分作为微积分的核心内容之一，既是理论研究的基石，也是解决实际问题的利器。在数学分析、微分方程、物理建模等众多领域，不定积分都扮演着不可或缺的角色。

本书旨在为读者系统梳理不定积分的理论体系和方法技巧。作者深知，许多学习者在面对纷繁复杂的积分技巧时常常感到困惑：何时使用换元法？怎样选择分部积分的顺序？如何处理有理函数积分？针对这些常见问题，本书通过大量典型例题和详细解析，帮助读者建立清晰的解题思路。

在 2024 年 12 月完成《计算极限的若干方法》后，笔者立即着手编写本书。本次编写采用模块化管理方式，将主要内容、习题、解答等分别处理，并通过 `\input` 命令将各个模块整合至主文件进行编译，极大提升了教材的可维护性和扩展性。

编写优质教材殊为不易，作者深谙：**内容质量才是评判著作的唯一标准**。为确保内容的严谨性与前沿性，在正式编写前，笔者系统研读了相关文献资料，深入学习了诸如“双元法”等新颖积分技巧以及“不定积分初等表示理论”等深刻数学理论，并将这些宝贵内容悉数纳入本书。同时，在编写过程中参考了多部经典教材，包括华东师范大学《数学分析》（上册）、陈纪修《数学分析》（上册）、周民强《数学分析》（第一册）等权威著作。

本书力求语言精炼准确，推导严谨详实。各章均配有精心设计的习题，便于读者巩固所学知识。建议读者研习时不仅要理解例题解法，更要勤于动手演算，深切体会各种积分方法的精妙之处。

愿本书能成为您研习不定积分的良师益友，助您在数学的海洋中扬帆远航！

卢鹏博

September 19, 2025

目录

前言	i
第零章 导数与微分	1
0.1 导数的定义	1
0.2 求导法则	3
0.3 参变量函数的导数	9
0.4 高阶导数	9
0.5 微分	14
0.6 多元函数的微分与偏导数	16
0.7 隐函数求导与微分	20
第零章 练习	22
第一章 原函数法	24
1.1 不定积分的定义	24
1.2 一些常用的原函数	25
1.3 不定积分的性质	26
第一章 练习	29
第二章 单换元法 (显式换元法)	31
2.1 第一类换元法 (凑微分法)	31
2.2 第二类换元法 (代入换元法)	34
第二章 练习	37
第三章 双曲函数	38
3.1 双曲函数的定义	38
3.2 双曲函数的基本性质	39
3.2.1 定义域、值域、奇偶性	39
3.2.2 导数及单调性	41
3.3 双曲函数的凹凸性	44
3.4 双曲函数之间的关系	49
3.5 利用双曲函数求解不定积分	54
第三章 练习	55
第四章 分部积分法与表格积分法	56
4.1 分部积分法	56
4.2 表格积分法	58
习题解答	59
第零章	59
第一章	68
第二章	73
第三章	77
参考文献	79

第零章 导数与微分

内容提要

- 导数的定义
- 求导法则
- 参变量函数的导数
- 高阶导数
- 微分
- 多元函数的微分与偏导数 (不作要求)
- 隐函数求导与微分

0.1 导数的定义

定义 0.1

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 (不是去心邻域) 内有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称该极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 。

如果令 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则上式可以改写为:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (2)$$

可以看出, 导函数也是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限, 因此导数也称差商。

如果 (1) 式极限不存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

由于在某一点的极限可以分为左极限和右极限, 因此相应地可以定义左右导数:

定义 0.2

(左导数) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域 $(x_0 - \delta, x_0]$ 内有定义, 若左极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

存在, 则称该极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数, 记作 $f'_-(x_0)$ 。

定义 0.3

(右导数) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $[x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义, 若右极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (4)$$

存在, 则称该极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$ 。

相应地, 左右导数也可以写成如下形式:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5)$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (6)$$

左导数和右导数统称单侧导数。

定理 0.1

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 则:

$$f'(x_0) \text{ 存在} \iff f'_-(x_0) \text{ 与 } f'_+(x_0) \text{ 均存在且相等}$$



证明 ($\Rightarrow$) 因为 $f'(x_0)$ 存在, 因此极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 因此该极限的左右极限存在且相等, 也即 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等.

($\Leftarrow$) 因为 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等, 因此左右极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

与

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

均存在且相等, 因此 $f'(x_0)$ 存在。 ■

例题 0.1 求函数 $f(x) = x^2$ 在点 $x = 0$ 处的导数。

解 根据定义, 求得:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

因此函数 $f(x) = x^2$ 在点 $x = 0$ 处的导数 $f'(0) = 0$

例题 0.2 求函数 $f(x) = \sin x$ 在点 $x = 0$ 处的导数。

解 根据定义, 得:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1$$

因此函数 $f(x) = \sin x$ 在点 $x = 0$ 处的导数 $f'(0) = 1$

定理 0.2 (可导的必要条件)

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。



证明 由于函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 根据定义, 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 由于分母极限为 0, 因此分子极限为 0, 也即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$$

故 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。 ■

推论 0.1

上述命题的逆否命题成立, 即若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导。



例题 0.3 证明符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处不可导。

证明 由于 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x = 0$ 处不连续, 因此 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x = 0$ 处不可导。 ■

定义 0.4 (导函数的定义)

若函数 $f(x)$ 在区间 $I = (a, b)$ 上每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上的可导函数。

对于每个 $x \in I$, 都存在 $f'(x)$ 。此时称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的导函数, 简称导数。其中

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in I$$

若 I 可以取到端点, 如 $I = [a, b]$, 则端点的导数值即为端点的左导数或右导数。

因此有时候也可以用导函数表示导数值, 即

$$f'(x_0) = y'|_{x=x_0} = f'(x)|_{x=x_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

我们下面求一些基本初等函数的导数:

例题 0.4 求 $f'(x)$, 其中:

1. $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}_+$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = a^x, a > 0$

5. $f(x) = \ln x$

6. $f(x) = \arctan x$

解

1.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

2.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} = nx^{n-1}$$

3.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x$$

4.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

5.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

6. 由 $\arctan A \pm \arctan B = \arctan \frac{A \pm B}{1 \mp AB}$, 因此:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x + \Delta x) - \arctan x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{\Delta x}{1+x^2+x\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}$$

0.2 求导法则

上一节我们从定义求得了一些函数的导数。下面我们引入一些求导法则, 这样就能很快求得复杂函数的导数。

定理 0.3 (求导法则)

若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x_0 处可导, 则

1. $f(x) = u(x) \pm v(x)$ 在点 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = u'(x) \pm v'(x) \quad (7)$$

2. $f(x) = u(x)v(x)$ 在点 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = u'(x)v(x_0) + v'(x)u(x_0) \quad (8)$$

3. 若 $v(x_0) \neq 0$, 则 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{[v'(x_0)]^2} \quad (9)$$



解 只需根据定义证明即可

1.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} v(x_0 + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} u(x_0) \\ &= u'(x)v(x_0) + v'(x)u(x_0) \end{aligned}$$

3. 令 $f(x) = u(x)g(x)$, $g(x) = \frac{1}{v(x)}$, 使用公式 (8), 可得

$$f'(x_0) = u'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)u(x_0)$$

下面求 $g'(x_0)$

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)}}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} \\ &= - \frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} \end{aligned}$$

因此

$$f'(x_0) = u'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)u(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{[v'(x_0)]^2}$$

推论 0.2

我们可以将公式 (8) 推广到 n 个函数相乘

$$\left[\prod_{k=1}^n f_k(x) \right]' = \sum_{k=1}^n f'_k(x) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} f_i(x)$$

公式 (8) 就是 $k = 2$ 时的特殊情形。



例题 0.5 求:

1. $(x \sin x)'$
2. $(\tan x)'$
3. $(xe^x)'$
4. $\left(\frac{1}{x^n}\right)', n \in N_+$

解

1.

$$(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$$

2.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3.

$$(xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

4.

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

反函数是一类导函数不太好求的函数, 如果直接使用导数的定义求解可能会很繁琐, 因此我们引入反函数求导公式。有时候, 使用反函数求导公式能够很快计算出反函数的导数。

定理 0.4 (反函数求导公式)

设 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(y)$ 互为反函数, 若 $\varphi(y)$ 在 y_0 的某个邻域连续, 严格单调且 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x = x_0 = \varphi(y_0)$ 处可导, 且导数为

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)} \quad (10)$$

证明 令 $\Delta x = \varphi(y_0 + \delta) - \varphi(y_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \delta) - f(x_0)$. 由于 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(y)$ 互为反函数, 且 $\varphi(y)$ 在 y_0 的某个邻域连续, 严格单调且 $\varphi'(y_0) \neq 0$ 从而 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域连续, 严格单调。因此 $\Delta x = 0$ 当且仅当 $\Delta y = 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ 当且仅当 $\Delta y \rightarrow 0$ 因此

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

在使用反函数求导公式求导时, 求导结果要表示成关于 x 的函数, 因此最后替换一下即可, 即:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]} \quad (11)$$

例题 0.6 求:

1. $(\arcsin x)'$
2. $(\arccos x)'$
3. $(\arctan x)'$
4. $(\operatorname{arccot} x)'$

解

1. $f(x) = \arcsin x$ 的反函数为 $x = \sin y$ 因此

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. $f(x) = \arccos x$ 的反函数为 $x = \cos y$ 因此

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. $f(x) = \arctan x$ 的反函数为 $x = \tan y$ 因此

$$f'(x) = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

4. $f(x) = \operatorname{arccot} x$ 的反函数为 $x = \cot y$ 因此

$$f'(x) = \frac{1}{(\cot y)'} = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\frac{1}{1 + \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

虽然使用导数的四则运算及反函数的求导公式能够解决一部分求导数问题, 但是事实上大多函数都不是基本初等函数, 而是经过初等函数复合得到的函数。因此掌握复合函数求导公式尤为重要。

引理 0.1

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是: 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上, 存在一个在点 x_0 处连续的函数 $H(x)$, 使得

$$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$$

那么就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



证明 ($\Rightarrow$) 此时已有 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 我们只需构造一个 $H(x)$ 即可。令

$$H(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \in U^\circ(x_0) \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = H(x_0)$$

此时 $H(x)$ 满足题目要求。

($\Leftarrow$) 由于 $H(x)$ 在点 x_0 处连续, 且

$$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = H(x_0)$$

因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $H(x_0) = f'(x_0)$ ■

下面引入复合函数求导法则。

定理 0.5 (复合函数求导法则)

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 若 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, $y = f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且

$$[f(g(x))]' = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$



证明 由于 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处可导。因此存在一个在点 $u = u_0$ 处连续的函数 $F(u)$, 使得 $f'(u_0) = F(u_0)$, 且

$$f(u) - f(u_0) = F(u)(u - u_0), \quad (u \in U(u_0))$$

同理, 由于 $u = g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导。因此存在一个在点 $x = x_0$ 处连续的函数 $G(x)$, 使得 $g'(x_0) = G(x_0)$, 且

$$g(x) - g(x_0) = G(x)(x - x_0), \quad (x \in U(x_0))$$

因此

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_0) &= f[g(x)] - f(g(x_0)) \\ &= F[g(x)] \cdot [g(x) - g(x_0)] = F(g(x))G(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

由于 $g(x), G(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, $f(u), F(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续, 因此 $H(x) = F(g(x))G(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。从而由引理可得 $f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且

$$[(f \circ g)'](x_0) = F(g(x_0))G(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

注 事实上

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) \end{aligned}$$

注 复合函数的求导法则也称为链式法则, 一般也记作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad (12)$$

如果复合嵌套次数较多时, 使用 (12) 可以清楚地知道该对哪一层函数求导。因此

推论 0.3

对于函数 $y = f_0(x_1), x_1 = f_1(x_2) \cdots x_n = f_n(x), y = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n(x)$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx_2} \cdots \frac{dx_n}{dx} \quad (13)$$

例题 0.7 求 $f'(x)$, 其中:

1. $f(x) = e^{x^2}$

2. $f(x) = \sin(\cos x)$

3. $f(x) = \ln(\tan x) \ (x \in D)$

4. $f(x) = \tan(\ln x) \ (x > 0)$

5. $f(x) = \frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^2(x+2)^3} \ (x > 2)$

解

1.

$$f'(x) = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$$

2.

$$f'(x) = \cos(\cos x)(\cos x)' = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

3.

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x}(\tan x)' = \frac{1}{\sin x \cos x} \ (x \in D)$$

4.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\ln x)}(\ln x)' = \frac{1}{x \cos^2(\ln x)} \ (x > 0)$$

5. 本题直接求比较麻烦, 因为有多个因式乘积求导, 需要分别计算各自的导数。但是如果我们取对数, 各个因式都变成了加减运算, 这样就能大大简化运算。

先取对数

$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^2(x+2)^3} = 4 \ln(x-1) + 5 \ln(x-2) - 2 \ln x - 3 \ln(x+2)$$

两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-2} - \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2}$$

因此

$$y' = \frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x^2(x+2)^3} \left[\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-2} - \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} \right] \quad (x > 0)$$

类似于上述求导的方法我们称为**对数-指数求导法**。为什么有指数呢? 因为我们可以把 y 写成 $e^{\ln y}$ 形式, 然后使用复合函数求导法则即可得到其导数。

定理 0.6 (对数-指数求导法)

在求解形如 $y = u(x)^{v(x)}$ 类型的导数时, 我们可以先对 y 取对数 $\ln y = v(x) \ln(u(x))$, 然后求导:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x)$$

那么就有

$$y' = [u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x) \right] \quad (14)$$

或者将其化为指数 $y = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$, 那么也能得到

$$y' = e^{v(x) \ln(u(x))} [v'(x) \ln(u(x))]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x) \right]$$

例题 0.8 求 $y = x^x$ 的导数

解 由于 $y = x^x = e^{x \ln x}$, 因此

$$y' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (1 + \ln x)$$

练习 0.1 求: 1. $(x^{\sin x})'$ 2. $(x^{x^x})'$

提示: 1. $(x^{\sin x})' = x^{\sin x} (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$ 2. $(x^{x^x})' = x^{x^x} [x^x (1 + \ln x) \ln x + \frac{x^x}{x}]$

至此, 我们叙述了基本求导法则以及一些函数的导数公式, 下面全部列举出来:

基本求导法则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + v'u$
3. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
4. 反函数求导法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
5. 复合函数求导法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
6. 对数-指数求导法 $y' = y \cdot (\ln y)'$

一些函数导数公式

1. $(C)' = 0 \quad (C \in \mathbb{R})$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
3. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x$
4. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$
7. $[u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x) \right]$

0.3 参变量函数的导数

有时候, 函数的方程并不是由 $y = f(x)$ 形式给出的, 而是使用参变量给出的。有时候也称为参数方程。不同于极坐标, 参数方程只有一个变量, 因此如果 x 与 y 能够一一对应, 那么 y 就是 x 的函数, 因此也能对 y 求导。

定义 0.5 (参变量函数的导数)

一般而言, 对于由参数方程给出的函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

其导数为

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (15)$$

例题 0.9 求上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, y > 0)$ 所确定的 $y = y(x)$ 的导数。

解 先写出椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

其中 $0 < \theta < \pi$, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{b \cos \theta}{-a \sin \theta} = -\frac{b}{a} \cot \theta$$

推论 0.4

对于某些使用极坐标表示的方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

如果 $r = r(\theta)$, 那么也能对 y 求导, 其导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(r(\theta) \sin \theta)'}{(r(\theta) \cos \theta)'} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} \quad (16)$$

例题 0.10 求

$$\begin{cases} x = -\cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases}$$

所确定的 $y = y(x)$ 的导数。

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\theta \sin \theta)'}{(-\cos \theta)'} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 1 + \theta \cot \theta$$

0.4 高阶导数

某些函数能够可导, 求导的得到的导函数仍是一个函数。因此如果导函数可导, 那么求导得到的函数称为原函数的二阶导数。因此根据定义, 我们可以定义二阶导数

定义 0.6 (二阶导数)

对于可导函数 $f(x)$, 其导函数记为 $f'(x)$, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 那么我们将此极限称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的二阶导数, 记作 $f''(x_0)$ 或 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}$

如果 $f'(x)$ 在区间 I 上都可导, 即极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \quad (x \in R)$$

都存在, 我们称 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 极限函数记作 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$



如果二阶导数也可导, 那么可以求得三阶导数。以此类推, 我们可以由 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数定义 n 阶导数。

定义 0.7 (n 阶导数)

对于 $n-1$ 阶可导函数 $f(x)$, 其 $n-1$ 阶导函数记为 $f^{(n-1)}(x)$, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 那么我们将此极限称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的 n 阶导数, 记作 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $\left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=x_0}$

如果 $f^{(n-1)}(x)$ 在区间 I 上都可导, 即极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \quad (x \in R)$$

都存在, 我们称 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导, 极限函数记作 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$



二阶及以上导数统称为高阶导数。

下面我们求一些函数的高阶导数。

例题 0.11 求 $f(x)$ 的 n 阶导数, 其中

1. $f(x) = x^n \quad (n \in N_+)$

2. $f(x) = \sin x$

3. $f(x) = \cos x$

4. $f(x) = e^x$

5. $f(x) = xe^x$

解

1.

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

...

$$f^{(n-1)}(x) = n!x$$

$$f^{(n)}(x) = n!$$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \dots = 0$$

2&3.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\f^{(3)}(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

同理可得

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

4. 由于 $(e^x)' = e^x, f^{(n)} = e^x$

5.

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x(x+1) \\f''(x) &= e^x(x+2) \\&\dots \\f^{(n)} &= e^x(x+n)\end{aligned}$$

对于两个函数相乘的 n 阶导数, 我们称为莱布尼茨公式。

定理 0.7 (莱布尼茨公式)

设两个 n 阶可导函数 $u(x), v(x)$, 我们有

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (17)$$



证明 使用数学归纳法。

1. $n=1$ 时, $(uv)' = u'v + v'u$ 成立;

2. 假设 $n=m \geq 2$ 时成立, 即有

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)}$$

那么 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned}(uv)^{(m+1)} &= \left[\sum_{k=0}^m C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)} \right]' \\&= \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(m-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(m-k)} v^{(k+1)} \\&= \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(m-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} u^{(m-k+1)} v^{(k)} \\&= \sum_{k=1}^m C_m^k u^{(m-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^m C_m^{k-1} u^{(m-k+1)} v^{(k)} + uv^{(m+1)} + u^{(m+1)}v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^m C_{m+1}^k u^{(m-k+1)} v^{(k)} + u v^{(m+1)} + u^{(m+1)} v \\
 &= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k u^{(m-k+1)} v^{(k)}
 \end{aligned}$$

由 1,2 可知公式 (17) 成立。 ■

 **笔记** 证明过程中使用了组合数的性质 $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$ 。根据组合数的定义立马可以证明。

我们尝试使用莱布尼茨公式求一些函数的高阶导数。

例题 0.12 求 $y^{(n)}$, 其中

1. $y = x e^x$

2. $y = e^x \sin x$

解 1. 令 $u(x) = e^x, v(x) = x$, 则 $u^{(n-k)} = e^x, v^{(k)} = 0 (k \geq 2)$

因此

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^1 C_n^k e^x x^{(k)} = x e^x + C_n^1 e^x = e^x (x + n)$$

2. 令 $u(x) = e^x, v(x) = \sin x$, 则 $u^{(n-k)} = e^x, v^{(k)} = \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$

因此

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$$

注 如果第 2 题不套用公式, 逐次求导, 得

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = (\sqrt{2}) e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$y'' = (\sqrt{2})^2 e^x \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4})$$

...

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{4})$$

这提醒我们

$$\sum_{k=0}^n C_n^k e^x \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{4})$$

也即

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{4}) \quad (18)$$

下面我们证明上式是对的。

证明 使用数学归纳法。

1. $n = 1$ 时显然成立;

2. 假设 $n = m \geq 2$ 时成立, 此时有

$$\sum_{k=0}^m C_m^k \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2}) = (\sqrt{2})^m \sin(x + m \cdot \frac{\pi}{4})$$

那么 $n = m + 1$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m C_{m+1}^k \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin x + \sin\left(x + (m+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^m C_m^k \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^m C_m^{k-1} \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin x + \sin\left(x + (m+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^m C_m^k \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^m C_m^k \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=0}^m C_m^k \sin\left(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^m C_m^k \left[\sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
&= \sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k \cdot \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^m \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + m \cdot \frac{\pi}{4}\right) \\
&= (\sqrt{2})^{m+1} \sin\left[x + (m+1) \frac{\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

这就证明了 (18) 是正确的。 ■

 **练习 0.2** 求:

1. $(x^2 e^x)^{(n)}$ (参考答案: $e^x [x^2 + 2nx + n(n-1)]$)

2. $(e^x \cos x)^{(n)}$ (参考答案: $(\sqrt{2})^n \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{4})$)

在上一节中, 我们讨论了参变量函数的导数, 不过只求了一阶导。我们现在求二阶导数。

推论 0.5 (参变量函数的二阶导)

对于由参数方程给出的函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

其一阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

其二阶导数为

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \quad (19)$$

 **练习 0.3** 求

$$\begin{cases} x = -\cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases}$$

所确定的 $y = y(x)$ 的二阶导数。

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\theta \sin \theta)'}{(-\cos \theta)'} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 1 + \theta \cot \theta$$

因此

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cot \theta - \theta \csc^2 \theta}{\sin \theta}$$

0.5 微分

对于一个函数 $f(x)$, 当自变量有一个微小的变化 Δx 时, 其因变量也会有一定的变化, 记

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

定义 0.8 (微分的定义)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上有定义, 若存在常数 A , 使得

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (20)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微, $A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分。其中 $o(\Delta x)$ 为 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 Δx 的高阶无穷小。

定理 0.8 (可微和可导的关系)

在一元函数中, 可微和可导是等价的。

证明 ($\Rightarrow$) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微, 则

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0) = A$

($\Leftarrow$) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

因此

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

此时 $A = f'(x_0)$ ■

当 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微时, 且 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 我们称 Δx 为自变量的微分, 记作 dx ; $A\Delta x$ 为 Δy 的线性主部, 也称为因变量的微分, 记作 dy 或 $df(x)$. 那么成立关系式

$$dy = A dx = f'(x_0) dx \quad (21)$$

若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上可微, 那么称 $f(x)$ 为区间 I 上的可微函数。函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的微分记作

$$dy = f'(x) dx, x \in I \quad (22)$$

由于导数与微分非常相似, 因此我们可以推出下面微分公式。

1. $d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x) = [u'(x) \pm v'(x)] dx$;
2. $d(uv) = u dv + v du$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$
4. 复合函数微分法则 $dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx = y'(u) u'(x) dx$

值得一提的是, 在复合函数求导法则中, 由于 $u'(x) dx = du$, 因此复合函数微分法则也可以写做

$$dy = f'(u) du$$

这与 (22) 在形式上完全相同, 因此这个性质被称为一阶微分形式不变性。

与导数类似, 函数也有高阶微分。类似于一阶微分, 我们可得高阶微分的表达式。 $n \geq 2$ 时的 n 阶微分统称为高阶微分。

定义 0.9 (高阶微分)

函数 $y = f(x)$ 的 n 阶微分 $d^n y$ 满足下式

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n \quad (23)$$

或者写成

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)} \quad (24)$$

这就解释了之前为什么可以用 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 表示 $y = f(x)$ 的 n 阶导数。



微分具有一阶微分形式不变性, 但是高阶微分就没有这个性质了。我们可以以二阶微分为例说明一下。

二阶微分的表达式为

$$d^2 y = f''(x) dx^2 \quad (25)$$

如果 x 为中间变量, $x = g(t)$, 那么

$$d^2 y = f(g(t))'' dt^2 = [f'(g(t))g'(t)]' dt^2 = [f''(g(t))(g'(t))^2 + f'(g(t))g''(t)] dt^2 = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x$$

此时不满足式 (25), 因此二阶微分不具有形式不变性。

例题 0.13 求下列函数的一阶与二阶微分:

1. $y = x^2$
2. $y = e^{\sin x}$
3. $y = \ln(\sin x)$
4. $y = x^x$

解

1.

$$dy = 2x dx, d^2 y = 2 dx^2$$

2.

$$\begin{aligned} dy &= e^{\sin x} \cos x dx \\ d^2 y &= [e^{\sin x} \cos^2 x - \sin x e^{\sin x}] dx^2 \end{aligned}$$

3.

$$dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx, d^2 y = -\sec^2 x dx^2$$

4.

$$\begin{aligned} dy &= x^x (1 + \ln x) dx \\ d^2 y &= \left[x^x (1 + \ln x)^2 + \frac{x^x}{x} \right] dx^2 \end{aligned}$$

 **练习 0.4** 求下列函数的微分:

1. $y = x^2 \ln x + \cos x^2$ (答案: $dy = x(2 \ln x + 1 - 2 \sin x^2) dx$)
2. $y = e^{\sin(ax+b)}$ (答案: $dy = a e^{\sin(ax+b)} \cos(ax+b) dx$)

0.6 多元函数的微分与偏导数

(本节仅为下节引入隐函数存在定理做铺垫, 不要求掌握。)

类似于一元函数, 多元函数也可以研究其可微性与可导性, 不过对于多元函数, 其导数一般指的是其偏导数。在定理0.8中, 我们证明了一元函数可微与可导是等价的, 但是在多元函数里这个结论就不成立了, 后续我们会举例说明这个结论不成立。

下面我们介绍多元函数的微分, 并引入多元函数偏导数。由于二元及以上函数类似, 因此下面多元函数一般指二元函数。

定义 0.10 (二元函数的微分)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有定义, 若 $P(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 若 $f(x, y)$ 在 P 点的全增量 Δz 可表示为

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (26)$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, 称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的全微分。

有时使用式 (26) 并不方便, 我们也可以写成下面形式:

推论 0.6 (可微的等价条件)

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, 则:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \quad (27)$$

其中

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \alpha = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \beta = 0$$

证明 只需证明

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

即可。也即证明

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

事实上

$$0 \leq \left| \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq \left| \frac{\alpha\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| + \left| \frac{\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\alpha| + |\beta| \rightarrow 0 \quad ((\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0))$$

这说明

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

例题 0.14 证明函数 $f(x, y) = xy$ 在点 (x_0, y_0) 可微。

证明 由于

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y$$

而

$$0 \leq \left| \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta y| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta y| \rightarrow 0 \quad ((\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0))$$

这说明 $\Delta x \Delta y = o(\rho)$

从偏导数字面意思, 不难猜出“偏”的意思是对一个自变量求导。事实也的确如此, 如果我们要求 $f(x, y)$ 对 x 的偏导数, 我们只需将 y 看成常数, 然后使用一元函数求导法则对 $f(x, y)$ 求导即可。

定义 0.11 (偏导数)

设函数 $z = f(x, y)$ 定义域为 $D, (x_0, y_0) \in D$, 且关于 x 的一元函数 $g(x) = f(x, y_0)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (28)$$

存在, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0) \in D$ 可对 x 偏导, 其偏导数记为 $f_x(x_0, y_0)$ 或 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$

同理, 若关于 y 的一元函数 $h(y) = f(x_0, y)$ 在 $U(y_0)$ 内有定义, 且极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (29)$$

存在, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0) \in D$ 可对 y 偏导, 其偏导数记为 $f_y(x_0, y_0)$ 或 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$

如果函数在区域 D 内可偏导, 则可得到一个偏导函数, 记为 $f_x(x, y), \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 或 $f_y(x, y), \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

定义了偏导数之后, 我们可以计算微分中的 A, B 具体等于多少。由于

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

采用定义偏导数的思想, 定义 $\Delta y = 0$, 并令 $\Delta x \rightarrow 0$ 则

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0)$$

同理可得

$$B = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{B\Delta y + \beta\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

定义了微分和偏导数之后, 我们就可以讨论它们之间的关系了。

定理 0.9 (可微和可偏导的关系)

在多元函数中, 可微条件更强, 可微一定可偏导, 但是反之不成立。

证明 经过刚才的计算, 我们知道, 如果函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 那么

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

因此 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可对 x 偏导, 且 $f_x(x_0, y_0) = A$, 同理可知 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可对 y 偏导, 且 $f_y(x_0, y_0) = B$ 。

反之我们只需取一个反例即可。我们取

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

根据偏导数的定义, 我们有

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

以及

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$$

而

$$\Delta z - dz = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

但是极限

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\rho \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

即极限

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

不存在 (可取 $\Delta y = 0$ 和 $\Delta y = \Delta x$)。因此逆命题不成立。即可偏导但不一定可微

因此上述定理也称为可微的必要条件。相应的, 也有可微的充分条件。

定理 0.10 (可微的充分条件)

偏导数连续条件更强, 偏导数连续一定可微, 但是反之不成立。

证明 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有连续的偏导数 f_x, f_y 。首先

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

上式中两个中括号内均是一元函数, 因此均可使用 Lagrange 中值定理, 得

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y, (0 < \theta_i < 1)$$

由于偏导数 f_x, f_y 在点 (x_0, y_0) 连续, 因此

$$f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \alpha$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_y(x_0, y_0) + \beta$$

其中 $\alpha, \beta \rightarrow 0, ((\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0))$

因此

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

故由推论 0.6 可知函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微。

反之我们只需取一个反例即可, 我们取

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

我们可以先根据定义求 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{|\Delta x|} = 0$$

同理可得 $f_y(0, 0) = 0$, 因此

$$\Delta z - dz = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - f_x(0, 0) \Delta x - f_y(0, 0) \Delta y = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

而

$$0 \leq \left| \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta x| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| + |\Delta y| \cdot \left| \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \rightarrow 0 ((\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0))$$

因此函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微, 但是计算其偏导。当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

令 $y = 0$, 则

$$f_x(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$$

可知上式在 $(0, 0)$ 间断, 即偏导数并不连续。

同一元复合函数类似, 二元复合函数也能求导与微分。

定理 0.11 (复合函数的偏导数)

若函数 $s = f(x, y), t = g(x, y)$ 在区域 D 上可微, $F(s, t)$ 在 D' 可微, 那么 $F(f(x, y), g(x, y))$ 在 $S = \{(x, y) | (f(x, y), g(x, y)) \in D', (x, y) \in D\}$ 上可微, 且

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \quad (30)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \quad (31)$$



我们不再证明上述定理。

笔记 需要注意的是, 该定理不仅适用于多元函数求偏导, 也适用于一元函数求导。如 $y = s^t, s = t = x$, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = t \cdot s^{t-1} + s^t \ln s = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$$

推论 0.7

一般地, 对于 n 元复合函数 $F(u_1, u_2, \dots, u_n), u_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 如果 F, u_i 可微, 那么

$$F(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

对 x_i 的偏导数为

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (32)$$



与一元函数类似, 二元函数也有中值定理。二元函数的中值定理与一元函数的 Lagrange 中值定理类似。在介绍二元函数中值定理之前, 先介绍一下凸区域的概念。

定义 0.12 (凸区域)

设 D 为一区域, 若任意 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$, 且 $P_1 \neq P_2$, 以及 $0 \leq \lambda \leq 1$ 都有

$$P(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in D$$

则称区域 D 为凸区域。

**定理 0.12 (二元函数中值定理)**

设二元函数 $f(x, y)$ 在凸开区域 D 上可微, 则对于任意两点 $P(a, b), Q(a+h, b+k) \in D$, 存在实数 $0 < \theta < 1$, 使得

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k \quad (33)$$



证明 令

$$F(t) = f(a+th, b+tk) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

因此 $F(t)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $(0, 1)$ 上可导, 使用 Lagrange 中值定理, 有

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

根据复合函数求导法则

$$F'(\theta) = f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k$$

由于 D 为凸区域, 因此 $(a+\theta h, b+\theta k) \in D$, 因此可得

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k$$

0.7 隐函数求导与微分

前五节我们介绍了导数和微分定义及计算。对于一般函数而言,我们可以通过求导法则与微分法则计算它们的导数和微分,但是有一类特殊的函数,它们由方程 $F(x, y) = 0$ 定义。虽然 y 是 x 的函数,但是很难甚至无法写出它们的显式表达式即 $y = f(x)$, 这类函数被称为**隐函数**。

定义 0.13 (隐函数)

设 $F(x, y)$ 是某个定义域 D 上的函数, 如果存在一个子集 $D' \subseteq D$, 使得对任意 $x \in D'$, 都有唯一的 y , 满足

$$F(x, y) = 0$$

则称方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个**隐函数**, 记作 $y = y(x)$ 。一般而言, 隐函数无法写成 $y = f(x)$ 的形式。换言之, 我们只知道 y 是 x 的函数, 但是很难甚至无法写出它们的显式表达式即 $y = f(x)$ 。

但是并不是所有满足 $F(x, y) = 0$ 的方程均能定义一个隐函数。比如 $x - y^2 = 0$, 此时一个 $x = 1$ 可以对应两个 y , 分别为 $y_1 = 1, y_2 = -1$ 。因此我们想知道什么时候能够确定一个隐函数, 下面引入隐函数存在性定理。

定理 0.13 (隐函数存在唯一性定理)

若函数 $F(x, y)$ 满足下面条件:

- (1). $F(x, y)$ 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续;
- (2). $F(x_0, y_0) = 0$;
- (3). $F(x, y)$ 在 D 上存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$, 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。

则

1. 存在 $U(P_0) = (x_0 - a, x_0 + a)$, 使得方程 $F(x, y) = 0$ 在 $U(P_0)$ 上唯一确定了一个定义在某个邻域 $U(x_0)$ 上的隐函数 $y = f(x)$, 且满足 $F(x, f(x)) \equiv 0, y_0 = f(x_0)$;
2. $f(x)$ 在 $U(P_0)$ 上连续。

证明 先证 1. 由于 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$ 。由于 $F_y(x, y)$ 在 D 上连续, 由连续函数保号性, 必存在 $U'(P_0) = [x_0 - b, x_0 + b] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset D$, 使得 $F_y(x_0, y_0) > 0$ 。

因此, 对给定的 $x \in [x_0 - b, x_0 + b]$, 视 $F(x, y)$ 为 y 的一元函数, 那么其在 $[y_0 - b, y_0 + b]$ 严格递增且连续。又由于 $F(x_0, y_0) = 0$, 因此

$$F(x_0, y_0 - b) < 0, F(x_0, y_0 + b) > 0$$

又由于条件 (1) 的连续性, 知 $F(x, y_0 - b)$ 与 $F(x, y_0 + b)$ 在 $x \in [x_0 - b, x_0 + b]$ 上也是连续的。因此由保号性, 存在 $0 < a \leq b$ (且要求 a 满足 $F(x_0 - a, y_0 - b) < 0, F(x_0 + a, y_0 + b) > 0$)。当 $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ 时, 有

$$F(x, y_0 - b) < 0, F(x, y_0 + b) > 0$$

那么根据 $F(x, y)$ 的连续性, 对任意固定的 $x' \in (x_0 - a, x_0 + a)$, 都有

$$F(x', y_0 - b) < 0, F(x', y_0 + b) > 0$$

那么对 $F(x', y)$ 使用介值定理, 以及单调性, 知存在唯一的 $y' \in (y_0 - b, y_0 + b)$, 使得 $F(x', y') = 0$, 这样就唯一确定了一个隐函数 $y = f(x)$, 且 $F(x, f(x)) \equiv 0$ 。

再证 2. 由刚才所得, 对任意 $x' \in (x_0 - a, x_0 + a)$, $y' = f(x')$, 都有

$$y_0 - b < y' < y_0 + b$$

取足够小的 ε , 那么

$$y_0 - b \leq y' - \varepsilon < y' < y' + \varepsilon \leq y_0 + b$$

由 $F(x', y)$ 的单调性, 知

$$F(x', y' - \varepsilon) < 0, F(x', y' + \varepsilon) > 0$$

因此存在唯一的 y , 使得 $F(x, y) = 0$, 即 $y = f(x)$, 且 $|y - y'| < \varepsilon$. 也即当 $|x - x'| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 因此 $f(x)$ 在 $x = x'$ 连续. 由 x' 的任意性可知 $f(x)$ 在 $(x_0 - a, x_0 + a)$ 上连续. ■

定理 0.14 (隐函数可微性定理)

设函数 $F(x, y)$ 满足定理 0.13 条件, 且在 D 上有连续的偏导数 $F_x(x, y)$, 那么由 $F(x, y)$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 在 $U(P_0)$ 上有连续的导函数 $f'(x)$, 且

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (34)$$

证明 设 $x, \Delta x \in (x_0 - a, x_0 + a), f(x), f(x + \Delta) \in (y_0 - b, y_0 + b)$, 而 $\Delta y = f(x + \Delta) - f(x) = f(x + \Delta) - y$, 由于

$$F(x, y) = 0, F(x + \Delta, y + \Delta) = 0$$

因此由二元函数中值定理 0.12 得

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta x + F_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta y$$

其中 $0 < \theta < 1$, 那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{F_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}$$

因此

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

定理 0.15 (两边求导-微分法)

在求解由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的导数时, 我们可以直接在方程两边同时对 x 求导, 或同时取微分, 也能得到 y 的导数 $f'(x)$. 即

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0 \quad (35)$$

或者

$$d(F(x, y)) = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy = 0 \quad (36)$$

这两个式子和式 (34) 是等价的, 但在求解一些较为复杂的问题时, 却更加方便. ♥

笔记 如果要求二阶导数, 只需对 (35) 式两边再次同时求导即可. 如果是更高阶导数, 只需在 (35) 式两边一直求导, 直到出现要求式即可.

例题 0.15 求由方程

$$F(x, y) = y - x - \frac{1}{2} \sin y = 0$$

所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数.

解 两边同时对 x 求导, 得

$$y' - 1 - \frac{y'}{2} \cos y = 0$$

因此

$$y' = f'(x) = \frac{2}{2 - \cos y}$$

练习 0.5 求由方程

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数. (答案: $f'(x) = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$)

第零章 练习

1. (1.) 设 $f'(x_0)$ 存在, 求下列各式的值:

$$\begin{aligned} (1) & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \\ (2) & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \\ (3) & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}. \end{aligned}$$

2. (2.) (1) 举出一个连续函数, 它仅在已知点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 不可导;

(2) 举出一个函数, 它仅在点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 可导.

3. (3.) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (m \text{ 为正整数}),$$

试问:

(1) m 等于何值时, f 在 $x=0$ 连续;

(2) m 等于何值时, f 在 $x=0$ 可导.

4. (4.) 求下列函数的导函数:

$$(1) y = [x]; \quad (2) y = |\sin x| \quad (3) y = \prod_{k=1}^n (x + a_k)$$

5. (5.) 设 $g(0) = g'(0) = 0$,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(0)$.

6. (6.) 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且对任何 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

若 $f'(0) = 1$, 证明对任何 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$$f'(x) = f(x)$$

7. (7.) 证明: 若 $f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0)$$

8. (8.) 设 f 为可导函数, 证明: 若 $x=1$ 时有

$$\frac{d}{dx} f(x^2) = \frac{d}{dx} f^2(x).$$

则必有 $f'(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$

9. (9.) 设函数 f 在 $x=1$ 处二阶可导, 证明: 若 $f'(1) = 0, f''(1) = 0$, 则在 $x=1$ 处有

$$\frac{d}{dx} f(x^2) = \frac{d^2}{dx^2} f^2(x).$$

10. (10.) 求由下列参量方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$(1) \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

11. (11.) 求下列函数的高阶微分:

(1) 设 $u(x) = \ln x, v(x) = e^x$, 求 $d^3(uv), d^3\left(\frac{u}{v}\right)$;

(2) 设 $u(x) = e^{\frac{x}{2}}, v(x) = \cos 2x$, 求 $d^3(uv), d^2\left(\frac{u}{v}\right)$.

12. (12.) 设 $y = \arctan x$.

(1) 证明它满足方程 $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$;

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$.

13. (13.) 设 $y = \arcsin x$.

(1) 证明它满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0 (n \geq 0)$;

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$

14. (14.) 设 $f(0) = 0, f'(0)$ 存在, 定义

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} f'(0)$$

15. (15.) 求下列方程确定的隐函数的导数:

(1) $x^2y + 3x^4y^3 - 4 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) $e^{-xy} + 2z - e^z = 0$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

16. (16.) $f(x)$ 在 x_0 处可导, $a_n < x_0 < b_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

17. (17.) 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = f(x)$ 为方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$.

18. (18.) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = A$, 求证: $f'(0)$ 存在且 $f'(0) = \frac{1}{2}A$.

19. (19.) 设 $f_{ij}(x) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为同一区间上的可导函数, 证明在该区域上成立:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

并利用这个结果求 $F'(x)$: (1) $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

第一章 原函数法

内容提要

□ 不定积分的定义

□ 不定积分的性质

□ 一些常用的原函数

类似于加减乘除,各自均有逆运算,微分也有逆运算——积分,将积分求得的结果微分,即可得到原函数。原函数法求不定积分是最简单、最直接的方法,我们需要熟知一些函数的原函数,这样我们就能很快得到不定积分的结果。

1.1 不定积分的定义

在介绍不定积分前,我们务必引入原函数的概念。

定义 1.1 (原函数)

设函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在区间 I 上有定义,若满足

$$F'(x) = f(x), x \in I \quad (1.1)$$

则我们称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

注 根据定义,我们知道 $F(x)$ 只是 $f(x)$ 的一个原函数,如果我们用 $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ 代替 $F(x)$,我们仍可得到

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

因此函数 $f(x)$ 的原函数不止一个,有无穷多个。

为了说明何种情况下 $f(x)$ 存在原函数,我们引入下述原函数存在定理。

定理 1.1 (原函数存在定理)

设 f 为区间 I 上的连续函数,则 f 在 I 上存在原函数 F , 且

$$F'(x) = f(x), x \in I$$

下面介绍不定积分的概念。

定义 1.2 (不定积分)

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1.2)$$

其中 $\int$ 为积分号, f 为被积函数, $f dx$ 为被积表达式, F 为 f 的一个原函数, C 为任意常数。

由于初等函数都是连续的,因此它们都是可积的。但是初等函数的原函数不一定是初等函数,我们会在??这一章中讨论原函数是否初等。下面求一些简单的不定积分。

例题 1.1 求:

1. $\int x dx$

2. $\int \sin x dx$

3. $\int \cos x dx$

4. $\int e^x dx$
5. $\int \frac{1}{x} dx$
6. $\int \frac{1}{x^2} dx$

解

1. 由于 $F(x) = \frac{1}{2}x^2, F'(x) = x$, 因此

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

2. 由于 $F(x) = -\cos x, F'(x) = \sin x$, 因此

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

3. 由于 $F(x) = \sin x, F'(x) = \cos x$, 因此

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

4. 由于 $F(x) = e^x, F'(x) = e^x$, 因此

$$\int e^x dx = e^x + C$$

5. 由于 $F(x) = \ln |x|, F'(x) = \frac{1}{x}$, 因此

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

6. 由于 $F(x) = -\frac{1}{x}, F'(x) = \frac{2}{x^2}$, 因此

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

1.2 一些常用的原函数

读者能够发现, 求不定积分比求导困难得多, 因为我们需要找到原函数, 而我们只知道原函数满足的性质, 即其导数等于原函数。求导只需使用求导法则, 而不定积分没有一个通用的积分公式, 因此我们只能先掌握一些常用的原函数, 然后根据它们来求不定积分。

我们将求导公式表改写成积分公式表, 这样我们就得到了基本积分公式。

常用积分表

1. $\int 0 dx = C;$
2. $\int 1 dx = x + C;$
3. $\int m dx = mx + C;$
4. $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1, x > 0);$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C (x \neq 0);$
6. $\int e^x dx = e^x + C;$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq -1);$
8. $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C (a \neq 0);$
9. $\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C (a \neq 0);$
10. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

11. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$
12. $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C;$
13. $\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C;$
14. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$
15. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan x + C.$

下面我们使用这些积分公式来求一些不定积分。

例题 1.2 求:

1. $\int x^2 dx$
2. $\int e^{-x} dx$
3. $\int \frac{2x}{x^4+1} dx$

解

1. 由于 $F(x) = \frac{1}{3}x^3, F'(x) = x^2$, 因此

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

2. 由于 $F(x) = -e^{-x}, F'(x) = -e^{-x}$, 因此

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

3. 由于 $F(x) = \arctan x^2, F'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$, 因此

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x^2 + C$$

1.3 不定积分的性质

在学习一些不定积分的计算后, 我们务必了解不定积分的一些性质。

定理 1.2 (不定积分的性质)

1. 设 $f(x)$ 的原函数存在, $k \neq 0$, 则

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

2. 设 $f(x), g(x)$ 的原函数均存在, 则

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

3. 设 $f(x), g(x)$ 的原函数均存在, k_1, k_2 不全为零, 则

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$$



证明 设 $F(x), G(x)$, 使得 $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$

1. 当 $k \neq 0$ 时,

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

因此

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

2. 由于

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

因此

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

3. 由性质 1,2 可得

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = \int k_1 f(x) dx + \int k_2 g(x) dx$$

(1) 若 k_1, k_2 均不为 0, 则已证明;

(2) 若 k_1, k_2 有一个为 0, 不妨设 $k_1 = 0$, 则

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = \int k_2 g(x) dx = k_2 \int g(x) dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$$

■

注 性质 1 中要求 $k \neq 0$, 若 $k = 0$, 则 $\int 0 dx = 0$, 但 $\int 0 dx = C$, 矛盾了, 性质 3 同理。

推论 1.1

设 $f_i(x)$ 存在原函数, k_i 不全为 0, 则

$$\int \left(\sum_{i=1}^n k_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n k_i \int f_i(x) dx$$

♡

下面我们利用这些性质求一些不定积分。

例题 1.3 求:

1. $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n) dx$
2. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx$
3. $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$
4. $\int \cos 3x \cdot \sin x dx$
5. $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$
6. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$
7. $\int \tan^2 x dx$
8. $\int \cot^2 x dx$
9. $\int |x - 1| dx$
10. $\int e^{-|x|} dx$

解

1.

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n) dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + a_n x + C$$

2.

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2}{x^2 + 1} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 - x + 2 \arctan x + C$$

3.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \tan x - \cot x + C$$

4.

$$\int \cos 3x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = -\frac{1}{8}(\cos 4x - 2 \cos 2x) + C$$

5.

$$\int (e^x - e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} - 2) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2x + C$$

6.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C$$

7.

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

8.

$$\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$$

9. 由于

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 连续, 因此其原函数 $F(x)$ 也连续, 且

$$F'(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

当 $x > 1$ 时, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C_1$, 当 $x < 1$ 时, $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + C_2$ 且有

$$\frac{1}{2} - 1 + C_1 = -\frac{1}{2} + 1 + C_2$$

即 $C_1 = 1 + C_2$ 故

$$\int |x-1| dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1, & x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C_1 - 1, & x < 1 \end{cases}$$

10.

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 连续, 因此其原函数 $F(x)$ 也连续, 且

$$F'(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$$

当 $x \geq 0$ 时, $F(x) = -e^{-x} + C_1$, 当 $x < 0$ 时, $F(x) = e^x + C_2$ 且有

$$-1 + C_1 = 1 + C_2$$

即 $C_1 = C_2 + 2$ 故

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + C_2 + 2, & x \geq 0 \\ e^x + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

 练习 1.1 求:

1. $\int (10^x - 10^{-x})^2 dx$

2. $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

3. $\int \sin^2 x dx$

4. $\int \cos^2 x dx$

5. $\int |\sin x| dx$

提示:

1.

$$\int (10^x - 10^{-x})^2 dx = \frac{10^{2x} - 10^{-2x}}{2 \ln 10} - 2x + C$$

2.

$$\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \frac{8}{15} x^{\frac{15}{8}} + C$$

3.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{2x - \sin 2x}{4} + C$$

4.

$$\int \cos^2 x dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

5.

$$\int |\sin x| dx = \begin{cases} -\cos x + C_k, & 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi \\ \cos x + C_k + 2, & (2k+1)\pi \leq x < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

其中 $C_k = C_{k-1} + 4$, 也就是说一旦确定一个 C_i , 那么整个 C_k 就被唯一确定了, 具体详见10..

定理 1.3 (不定积分的几何意义)

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 均为 $f(x)$ 的原函数, 因此 $f(x)$ 的不定积分即为相互平行的曲线簇, 若在点 $(x, \int f(x) dx)$ 上做 $\int f(x) dx$ 的切线, 则这些切线相互平行。



在求某些不定积分时, 有时题目会给出一个原函数满足的条件, 即 $F(x_0) = y_0$ (这通常被称为初始条件)。有了这一条件, 我们就可以确定不定积分中 C 的具体值, 那么此时, 满足初始条件的原函数就被唯一确定了。

例题 1.4 已知曲线 $y = f(x)$ 在任意一点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率都等于 x^2 , 并且曲线经过 $(3, 2)$, 求该曲线的方程。

解 由不定积分的几何意义, 可知

$$y' = f'(x) = x^2$$

因此

$$y = f(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

将 $(3, 2)$ 代入上式, 可得 $C = -7$, 因此

$$y = f(x) = \frac{1}{3} x^3 - 7$$

上述例题中, 满足 $y' = f'(x) = x^2$ 的原函数有无数多个, 但是增加了初值条件 $F(3) = 2$, 而满足该条件的原函数仅有一个。

第一章 练习

1. (1.) 验证下列等式:

(1) $\int f'(x) dx = f(x) + C$

(2) $\int df(x) = f(x) + C$

2. (2.) 证明: 若 $f(x)$ 为连续的奇函数, 其原函数一定为偶函数; 但 $f(x)$ 为连续的偶函数, 其原函数不一定为奇函数。

3. (3.) 证明: 含有第一类间断点的函数没有原函数.
 4. (4.) 举例说明不连续的函数也可能具有原函数.
 5. (5.) 举例说明含有第二类间断点的函数可能有原函数, 也可能没有原函数.
 6. (6.) 计算下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int (x^3 + 2x^2 - 5\sqrt{x})dx & (2) \int (\sin x + 3e^x)dx \\ (3) \int (x^a + a^x) dx (a > 0) & (4) \int (2 + \cot^2 x) dx \\ (5) \int (2 \csc^2 x - \sec x \tan x) dx & (6) \int (x^2 - 2)^3 dx \\ (7) \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx & (8) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) dx \end{array}$$

7. (7.) 计算下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \left(2^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 dx & (2) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx \\ (3) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx & (4) \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ (5) \int (1-x^2) \sqrt{x} \sqrt{x} dx & (6) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\ (7) \int \left(1-x+x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx & (8) \int \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx \end{array}$$

8. (8.) 计算下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{dx}{\sqrt{2gx}} (g \text{ 为正常数}) & (2) \int (2^x + 3^x)^2 dx \\ (3) \int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx & (4) \int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx \\ (5) \int \tan^2 x dx & (6) \int \sin^2 x dx \\ (7) \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx & (8) \int 10^t \cdot 3^{2t} dt \end{array}$$

9. (9.) 计算下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx & (2) \int \left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}\right) dx \\ (3) \int (\cos x + \sin x)^2 dx & (4) \int \cos x \cdot \cos 2x dx \\ (5) \int (e^x - e^{-x})^3 dx & (6) \int (e^x + e^{-x})^3 dx \\ (7) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx & (8) \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx \end{array}$$

10. (10.) (P29:5.) 计算下列不定积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int |x^2 - 1| dx & (2) \int |\cos x| dx \end{array}$$

11. (11.) 曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(e, -1)$, 且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.
 12. (12.) 曲线 $y = f(x)$ 在任意一点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1.
 (1) 求出该曲线方程的所有可能形式, 并在直角坐标系中画出示意图;
 (2) 若已知该曲线经过 $(1, 1)$ 点, 求该曲线的方程.

第二章 单换元法 (显式换元法)

内容提要

□ 第一类换元法 (凑微分法)

□ 第二类换元法 (代入换元法)

在一般的求解不定积分问题中, 一些被积函数会进行变形, 使得原来的积分公式表无法直接求解. 这时, 我们可以采用单换元法 (显式换元法) 来求解. 换元法的基本思想是, 将原积分公式中的某些变量换成另一些变量, 然后利用变换后的积分公式来进行求解. 因此我们需要找到一些合适的换元方法, 使得换元之后的表达式能够简单快速地求解出来。

2.1 第一类换元法 (凑微分法)

第一类换元法, 又称凑微分法. 由于一阶微分形式不变性, 我们可以将微分算子 dx 通过引入中间变量 $x = \varphi(t)$, 那么 $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$, 我们可以对上式进行逆操作, 即找到 $\varphi'(t)$ 及 $\varphi(t)$, 那么 $\varphi'(t)dt = d(\varphi(t))$, 那么原本对 t 求的不定积分, 可以转化为对 x 求不定积分。

定理 2.1 (第一类换元法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\varphi(t)$ 在区间 J 上可导, 且 $\varphi(J) \subseteq I$. 如果不定积分 $\int f(x) = F(x) + C$ 在 I 上存在, 则不定积分 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 在 J 上也存在, 且

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(x)dx \quad (x = \varphi(t)) \quad (2.1)$$

证明 设 $F'(x) = f(x)$, $x = \varphi(t)$, 则

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

因此

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

虽然第一类换元法的基本思想及表达式很简单, 但是它的威力是不容小觑的, 有时候比较困难的不定积分, 使用第一类换元法能很快求解出来。下面使用第一类换元法求一些不定积分。

例题 2.1 求 $\int \tan x dx$

解

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x)$$

令 $u = \cos x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, 则

$$\int \tan x dx = - \int \frac{1}{u} du = - \ln |u| + C = - \ln |\cos x| + C$$

在熟悉第一类换元法后, 我们可以不用写出中间变量 u 及 $f(x)$ 。

例题 2.2 求 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$

解

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

例题 2.3 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0)$

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} \left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

例题 2.4 求 $\int \cot x dx$

解

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln |\sin x| + C$$

例题 2.5 求 $\int \sec x dx$

解 法一:

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \end{aligned}$$

法二:

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

练习 2.1 求 $\int \csc x dx$

提示:

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

例题 2.6 求 $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$

解

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} \\ &= \int \frac{du}{u^2 - 2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{x + \sqrt{2}} \right) du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\ln |u - \sqrt{2}| \right] - \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\ln |u + \sqrt{2}| \right] + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

练习 2.2 求 $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

提示:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}x} + C$$

例题 2.7 求 $\int \tan^3 x dx$

解

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan x (\tan^2 x) dx \\&= \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx \\&= \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx \\&= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C\end{aligned}$$

练习 2.3 求 $\int \tan^5 x dx$

提示:

$$\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$$

例题 2.8 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2 \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) = 2 \arctan \sqrt{x} + C$$

例题 2.9 求 $\int \sin mx \cos nx dx \ (m \neq n)$

解

$$\begin{aligned}\int \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx \\&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m+n)}{m+n} + \frac{\cos(m-n)}{m-n} \right] x + C\end{aligned}$$

通过以上例题, 我们可以总结出以下几种常见的凑微分类型 (不要求掌握, 能够发现凑微分的形式即可): 常见的凑微分类型

1. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b)$
2. $\int f(x^n) x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int f(x^n) d(x^n)$
3. $\int f(x^n) \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} \int f(x^n) \frac{1}{x^n} d(x^n)$
4. $\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$
5. $\int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d(\cos x)$
6. $\int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$
7. $\int f(\cot x) \csc^2 x dx = - \int f(\cot x) d(\cot x)$
8. $\int f(\tan x) \tan^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x) - \int f(\tan x) dx$
9. $\int f(\cot x) \cot^2 x dx = - \int f(\cot x) d(\cot x) - \int f(\cot x) dx$
10. $\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x)$
11. $\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x)$

无论怎么变化, 第一类换元法的基本思想是一致的, 即需要凑出 $\varphi'(t)$ 及 $\varphi(t)$, 然后对变换后的积分表达式进行求解。

2.2 第二类换元法 (代入换元法)

但是有时候, 直接求 $\int f(x)dx$ 时比较困难, 这时候, 如果我们对表达式变形, 引入中间变量, 就会使表达式变得简单, 这种换元法称为**第二类换元法**。第二类换元法相当于第一类换元法的逆向操作, 即引入一个中间变量 $x = \varphi(t)$. 虽然看起来被积表达式变得更复杂了, 但是有时恰当的换元会使表达式变得尤为简单, 也就容易计算了。

定理 2.2 (第二类换元法)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\varphi(t)$ 在区间 J 上可导, 且 $\varphi(J) = I$, 且 $x = \varphi(t)$ 在区间 J 上存在反函数 $t = \varphi^{-1}(x), x \in I$. 如果不定积分 $\int f(x)dx$ 在 I 上存在, 则当不定积分

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C$$

在 J 上存在时, 在 I 上有

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C \quad (2.2)$$

证明 设

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C, x = \varphi(t)$$

则

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

例题 2.10 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

解 为了去掉根号, 我们令 $x = t^6$, 则 $dx = 6t^5 dt$, 那么

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} \\ &= \int \frac{6t^5}{t^2 + t^3} dt = \int 6 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 6 \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln |t+1| \right) + C \\ &= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6 \ln |x^{1/6} + 1| + C \end{aligned}$$

例题 2.11 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \ (a > 0)$

解

令 $x = \sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \sec t \cdot \tan t dt$, 那么

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\tan t} dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C$$

由图可知, $\sec t = \frac{x}{a}, \tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$, 因此

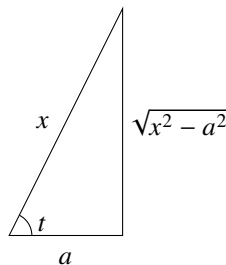
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C' = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

例题 2.12 求 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$

解 令 $x = \sec t$, 则

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec^2 t \cdot \tan t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$$

例题 2.13 求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx$



解 令 $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$, 因此

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx &= \int \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt \\ &= \int (\sec t - \cos t) dt \\ &= |\ln |\sec t + \tan t| - \sin t + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C \end{aligned}$$

例题 2.14 求 $\int \frac{1}{e^x + e^{2x}} dx$

解 令 $x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{2x}} dx &= \int \frac{1}{t(t+t^2)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= -\frac{1}{t} - \ln |t| + \ln |t+1| + C \\ &= -e^{-x} - x + \ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

例题 2.15 求 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x+1}, x = \ln(t^2-1), dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2-1} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-1} dt \\ &= \ln |t-1| - \ln |t+1| + C \\ &= \ln \left| \sqrt{e^x+1} - 1 \right| - \ln \left| \sqrt{e^x+1} + 1 \right| + C \\ &= \ln \left| 1 + 2e^{-x} - 2 \cdot \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x} \right| + C \end{aligned}$$

练习 2.4 求 $\int \frac{1}{\sqrt{e^{nx}+1}} dx \ (n \in \mathbf{N})$

提示:

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{nx}+1}} dx = \frac{1}{n} \ln \left| 1 + 2e^{-nx} - 2 \cdot \frac{\sqrt{e^{nx}+1}}{e^{nx}} \right| + C$$

有些题目第一换元法与第二换元法都能使用, 有时第一换元法更加简便, 有时第二换元法更加简便. 因此做题时不应局限于一种方法上, 可以多尝试其它方法, 比如改变换元引入的变量, 甚至想办法凑微分等.

例题 2.16 求 $\int \frac{1+x}{x^2+x \ln x} dx$

解 法一:

$$\int \frac{1+x}{x^2+x \ln x} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{x + \ln x} d(x + \ln x) \\
 &= \ln |x + \ln x| + C
 \end{aligned}$$

法二: 令 $x = e^t$, $dx = e^t dt$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1+x}{x^2+x \ln x} dx &= \int \frac{1+e^t}{e^t(e^t+t)} e^t dt \\
 &= \int \frac{1+e^t}{e^t+t} dt = \int \frac{1}{e^t+t} d(e^t+t) \\
 &= \ln |e^t+t| + C \\
 &= \ln |x + \ln x| + C
 \end{aligned}$$

例题 2.17 求 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx$
解

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx &= \int \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x+1}} d(e^x) \\
 &\stackrel{t=e^x}{=} \int \frac{t}{\sqrt[3]{1+t}} dt \stackrel{u=t+1}{=} \int \frac{u-1}{\sqrt[3]{u}} du \\
 &= \int (u^{2/3} - u^{-1/3}) du \\
 &= \frac{3}{5} u^{5/3} - \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\
 &= \frac{3}{5} (e^x+1)^{5/3} - \frac{3}{2} (e^x+1)^{2/3} + C
 \end{aligned}$$

最后, 我们总结一下第二类换元法的常用技巧与常见类型。

第二换元法常用技巧

1. 使用三角恒等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (2.3)$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (2.4)$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad (2.5)$$

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x \quad (2.6)$$

2. 将根式整体换元, 令 $x = \sqrt[p]{h(a, x)}$, 换元后大概率没有根式 (或分母只有形如 $x^{p/q}$ 之类的项);

3. 将重复出现的较为复杂的项进行换元, 如 $\int \frac{1}{e^x+e^{2x}} dx$, 令 $t = e^x$, 还原后分母就只含有多项式, 方便计算;

第二换元法常见类型

1. $\int f(x, \sqrt[3]{ax+b})$, 令 $x = \sqrt[3]{ax+b}$;

2. $\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})$, 令 $x = a \sin t$ 或 $x = a \cos t$;

3. $\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})$, 令 $x = a \tan t$;

4. $\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})$, 令 $x = a \sec t$;

5. $\int f(a^x)$, 令 $t = a^x$.

在实际计算过程中, 第一、第二换元法可能会一起使用。因此在求解不定积分时, 适当观察被积函数式的结构, 选择合适的换元法, 以及恰当的换元变量, 可以大大提高计算效率。

第二章 练习

1. (1.) 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int f(x) \frac{\sin x}{x} dx$.

2. (2.) 设

$$f(x) = \int \left[\sum_{i=1}^n \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \right] dx$$

其中 $x_k \in \mathbf{R}, x_i \neq x_j (x \neq j), f(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i$. 求证: $f(x)$ 有 n 个互异的根.

3. (3.) 设 $f'(\sin^2 x) = \cos(2x) + \tan^2 x$, 求 $f(x)$

4. (4.) 求下列不定积分:

(1) $\int (2+x)^n dx$

(2) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

(3) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

(4) $\int \cos^5 x dx$

(5) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(6) $\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$

(7) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$

(8) $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2-1}} dx$

5. (5.) 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{1+x^4} dx$

(2) $\int \frac{1}{x \ln x (1 + \ln \ln x)} dx$

(3) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$

(5) $\int \frac{x \tan(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(6) $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1}{1+x^2}} dx$

(7) $\int \frac{x + \arctan^2 x}{1+x^2} dx$

(8) $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

6. (6.) 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

(2) $\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)} dx$

(3) $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\ln^2 x)} dx$

(4) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx$

(5) $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$

(6) $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} dx$

(7) $\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{(1 + \cos x)^2} e^x dx$

(8) $\int \frac{x^2 - 1}{x \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} dx$

7. (7.) 求: $\int \frac{1}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$.

8. (8.) 求: $\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}} dx$.

9. (9.) 设 $\int f(x) dx = \ln(\sin x) + C$, 求 $\int x f(1-x^2) dx$.

10. (10.) 证明:

$$\int \frac{x f'(x) - (1+x) f(x)}{x^2 e^x} dx = \frac{f(x)}{x e^x} + C$$

第三章 双曲函数

内容提要

- 双曲函数的定义
- 双曲函数之间的关系的
- 双曲函数的基本性质
- 利用双曲函数求解不定积分
- 双曲函数的凹凸性

双曲函数作为一类特殊的函数,在某些方面应用很广。了解并熟悉了双曲函数的一些性质后,我们也可以借助双曲函数来快速求解一些不定积分。双曲函数的作用不容小觑,但是双曲函数却成了“高中不讲,大学不教”的内容。因此本章主要介绍一下双曲函数的概念,并推导相关性质,以及介绍双曲函数在不定积分中的应用。

双曲函数并不像其它的特殊函数,它并不复杂,这是因为双曲函数可以用初等函数表达。但是双曲函数的某些性质和三角函数类似,因此双曲函数也被分为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切、双曲正割、双曲余割等函数。

3.1 双曲函数的定义

双曲函数概述 17 世纪数学家雅可比·伯努利提出:两端系于两个固定点的均匀绳索,在仅受其自身重力的作用下形成的曲线是什么曲线?他本人和伽里略起初都误认为是一条抛物线。但是,约翰·伯努利及其他数学家随后用微分方程推导出的曲线方程却为 $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$,称之为悬链线。当 $a = 1$ 时就是双曲余弦函数。我们现在介绍六种双曲函数。

定义 3.1 (双曲函数)

双曲正弦:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.1)$$

双曲余弦:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3.2)$$

双曲正切:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3.3)$$

双曲余切:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (3.4)$$

双曲正割:

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad (3.5)$$

双曲余割:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \quad (3.6)$$

我们常用的双曲函数是 $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x$ 。

双曲函数也有反函数,称之为反双曲函数。我们一般常用的反双曲函数是 $\operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arccosh} x, \operatorname{arctanh} x, \operatorname{arcoth} x$,下面先介绍它们表达式,我们会在 3.2.1 证明。

推论 3.1 (反双曲函数)

反双曲正弦:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (3.7)$$

反双曲余弦:

$$\operatorname{arccosh} x = \pm \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \geq 1) \quad (3.8)$$

反双曲正切:

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (|x| < 1) \quad (3.9)$$

反双曲余切:

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (|x| > 1) \quad (3.10)$$



3.2 双曲函数的基本性质

双曲函数的性质和三角函数类似,但是有一些不同。

3.2.1 定义域、值域、奇偶性

定义域

首先看定义域,根据双曲函数的定义不难看出, $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\operatorname{sech} x$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 而 $\operatorname{coth} x$, $\operatorname{csch} x$ 的定义域为 $x \neq 0$.

奇偶性

再来看奇偶性,六种双曲函数的定义域均关于原点对称,且

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh(x) \quad (3.11)$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \quad (3.12)$$

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh(x) \quad (3.13)$$

$$\operatorname{coth}(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = -\frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{coth}(x) \quad (3.14)$$

$$\operatorname{sech}(-x) = \frac{1}{\cosh(-x)} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech}(x) \quad (3.15)$$

$$\operatorname{csch}(-x) = \frac{1}{\sinh(-x)} = -\frac{1}{\sinh x} = -\operatorname{csch}(x) \quad (3.16)$$

因此 $\sinh x$, $\tanh x$, $\operatorname{coth} x$ 为奇函数, $\cosh x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$ 为偶函数。

值域

最后看值域,先考虑 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\operatorname{sech} x$, 因为它们的定义域为 $\mathbf{R}$.

由于

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

是连续的奇函数,因此只需考虑 $[0, +\infty)$ 即可。由于

$$\sinh(0) = 0, \sinh(+\infty) = +\infty$$

因此 $\sinh x \in \mathbf{R}$.

同理,由于

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

是连续的偶函数, 因此只需考虑 $[0, +\infty)$ 即可。由于

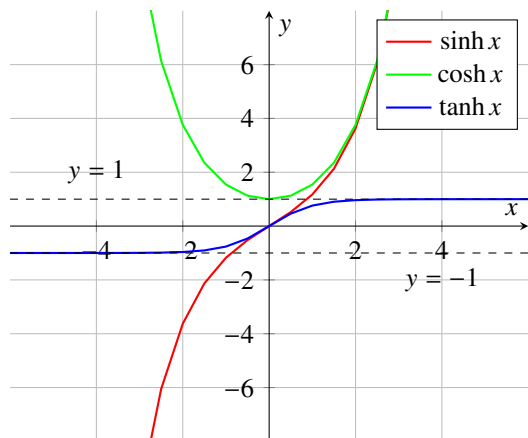
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1, \cosh(+\infty) = +\infty$$

因此 $\cosh x \in [1, +\infty)$ 。

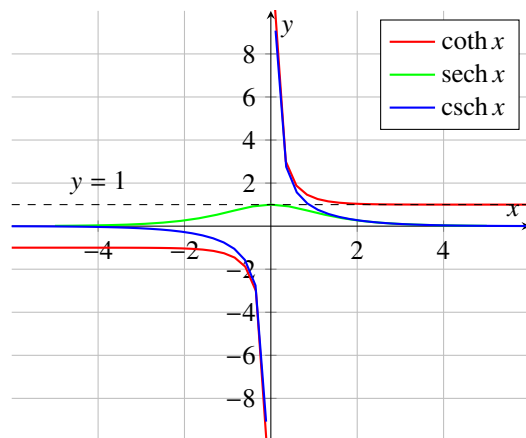
而

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \in (-1, 1)$$

做出它们的图像如图所示:



(a) 前 3 个双曲函数



(b) 后 3 个双曲函数

图 3.1: 6 个双曲函数的图像

从图像上也能大概看出它们的定义域、值域、奇偶性。

反双曲函数

一般来说反函数的定义域与值域互换, 奇偶性不变, 在叙述它们的性质之前, 我们先推导它们的表达式。

1. 由于 $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 解方程

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

那么

$$(e^y - e^{-y})^2 = 4x^2, (e^y + e^{-y})^2 = 4x^2 + 4$$

因此解得 $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, 也即

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (3.17)$$

2. 由于 $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 解方程

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

那么

$$(e^y + e^{-y})^2 = 4x^2, (e^y - e^{-y})^2 = 4x^2 - 4$$

因此解得 $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$, 也即

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \quad (3.18)$$

3. 由于 $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, 解方程

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

因此解得 $e^{2y} = -\frac{x+1}{x-1}$, 也即

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (|x| < 1) \quad (3.19)$$

4. 由于 $y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, 解方程

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$

因此解得 $e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$, 也即

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (|x| > 1) \tag{3.20}$$

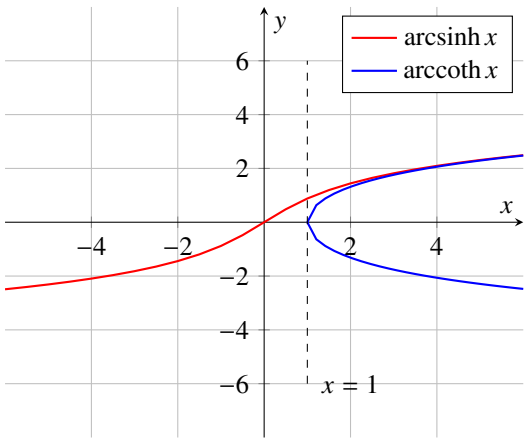
定义域、值域、奇偶性

由上推导, 以及反三角函数的性质, 可得反双曲函数的定义域、值域、奇偶性如下表:

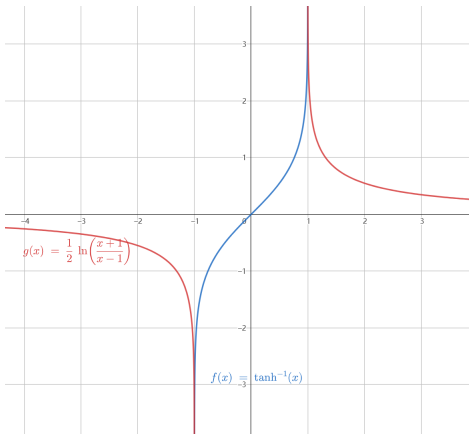
表 3.1: 反双曲函数的性质

性质 函数	定义域	值域	奇偶性
$\operatorname{arcsinh} x$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	奇
$\operatorname{arccosh} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$\mathbf{R}$	偶
$\operatorname{arctanh} x$	$(-1, 1)$	$\mathbf{R}$	奇
$\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	奇

做出它们的图像如图所示:



(a) 前 2 个反双曲函数



(b) 后 2 个反双曲函数

图 3.2: 4 个反双曲函数的图像

3.2.2 导数及单调性

定理 3.1 (可导函数的单调性)

对于在区间 I 上的可导函数 $f(x)$, $f(x)$ 单调递增 (递减) 的充要条件是:

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) \tag{3.21}$$

定义 3.2 (极值点与极值)

设函数 $f(x)$ 在某个邻域 $U(x_0)$ 内取得最大 (小) 值, 我们称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极大 (小) 值点, 统称极值点。极值点是横坐标的值, 而非图像上的点。而极值, 就是将 $x = x_0$ 代入所得到的值 $f(x_0)$ 。极大值大于极值点邻域的所有值, 极小值小于极值点邻域的所有值。

定理 3.2 (可导函数极值点的必要条件)

若可导函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值, 则

$$f'(x_0) = 0 \quad (3.22)$$

注 上述定理只是必要条件而非充要条件, 如函数 $f(x) = x^3$, 虽然 $f'(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

注 不可导的函数也可能有极值点, 比如 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 但 $x = 0$ 是 y 的极值点。

笔记 极值的大小并不是字面意思上的极大值大于极小值。事实上, 极小值也有可能大于极大值。

笔记 根据极大值, 极小值的定义可知: 对于可导函数, 极大值就是函数单调性从单调递增改变到单调递减的那个点; 极小值就是函数单调性从单调递减改变到单调递增的那个点。

定义 3.3 (驻点)

我们称 $f'(x) = 0$ 的点 x 为函数 $f(x)$ 的驻点。

笔记 可导函数的极值点一定是驻点, 但驻点不一定是极值点。导函数在驻点附近变号的点是极值点。

例题 3.1 判断函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ 的单调性, 并求它的极值。

解

$$y' = x^2 - x = x(x - 1)$$

驻点为 $x = 0, x = 1$, 验证可知它们都是极值点。其中, 极小值为 $y(1) = -\frac{1}{6}$, 极大值为 $y(0) = 0$ 。

下面研究双曲函数的导数。

导数

首先, 对于在 $\mathbf{R}$ 上连续的双曲函数 $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \operatorname{sech} x$, 它们的导数分别为:

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (3.23)$$

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad (3.24)$$

$$(\tanh x)' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh^2 x \quad (3.25)$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = -\tanh x \cdot \operatorname{sech} x \quad (3.26)$$

其次, 对于在 $x = 0$ 处间断, 故在 $x = 0$ 处不可导的双曲函数 $\coth x, \operatorname{csch} x$, 我们有:

$$(\coth x)' = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = 1 - \coth^2 x \quad (x \neq 0)$$

$$(\operatorname{csch} x)' = \frac{2(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = -\coth x \cdot \operatorname{csch} x \quad (x \neq 0)$$

反双曲函数的表达式也比较初等, 因此直接求导即可:

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (3.27)$$

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \pm \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x \geq 1) \quad (3.28)$$

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1) \quad (3.29)$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1) \quad (3.30)$$

单调性

根据双曲函数的导数及定义域, 我们能很快地判断它们的单调性。**双曲函数的单调性**

1. $\sinh x$. 由于

$$(\sinh x)' = \cosh x > 0$$

因此 $\sinh x$ 单调递增.

2. $\cosh x$. 由于

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$x < 0$ 时 $\sinh x < 0$; $x > 0$ 时 $\sinh x > 0$. 因此 $\cosh x$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减; 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

3. $\tanh x$. 由于

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x > 0$$

因此 $\tanh x$ 单调递增.

4. $\coth x$. 由于

$$(\coth x)' = 1 - \coth^2 x < 0$$

因此 $\tanh x$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.(由于 $x = 0$ 无定义, 因此不能将区间合并).

5. $\operatorname{sech} x$. 由于

$$(\operatorname{sech} x)' = -\tanh x \cdot \operatorname{sech} x < 0$$

$x < 0$ 时 $\tanh x < 0$; $x > 0$ 时 $\tanh x > 0$. 因此 $\operatorname{sech} x$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增; 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

6. $\operatorname{csch} x$. 由于

$$(\operatorname{csch} x)' = -\coth x \cdot \operatorname{csch} x = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}$$

因此 $\operatorname{csch} x$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.(由于 $x = 0$ 无定义, 因此不能将区间合并).
反双曲函数的单调性也很容易判断:

反双曲函数的单调性

1. $\operatorname{arcsinh} x$. 由于

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

因此 $\operatorname{arcsinh} x$ 单调递增.

2. $\operatorname{arccosh} x$ ($x \geq 1$). 我们只取上半支研究, 即 $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 研究. 由于

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$$

因此 $\operatorname{arccosh} x$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增; 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

3. $\operatorname{arctanh} x$ ($|x| < 1$). 由于

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2} > 0$$

因此 $\operatorname{arctanh} x$ 在 $(-1, 1)$ 单调递增.

4. $\operatorname{arcoth} x$ ($|x| > 1$). 由于

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1 - x^2} < 0$$

因此 $\operatorname{arcoth} x$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.

3.3 双曲函数的凹凸性

我们先定义函数的凹凸性并介绍一些函数凹凸性的判别方法后再判断双曲函数的凹凸性。

定义 3.4 (函数的凹凸性)

设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数, 若任意 $x_1, x_2 \in I$, 即任意 $\lambda \in (0, 1)$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (3.31)$$

我们称函数 $f(x)$ 为 I 上的凸函数. 反之, 若满足

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (3.32)$$

则称函数 $f(x)$ 为 I 上的凹函数.

如果上述定义中的不等式取严格不等号, 则称函数 $f(x)$ 为 I 上的严格凸函数和严格凹函数。

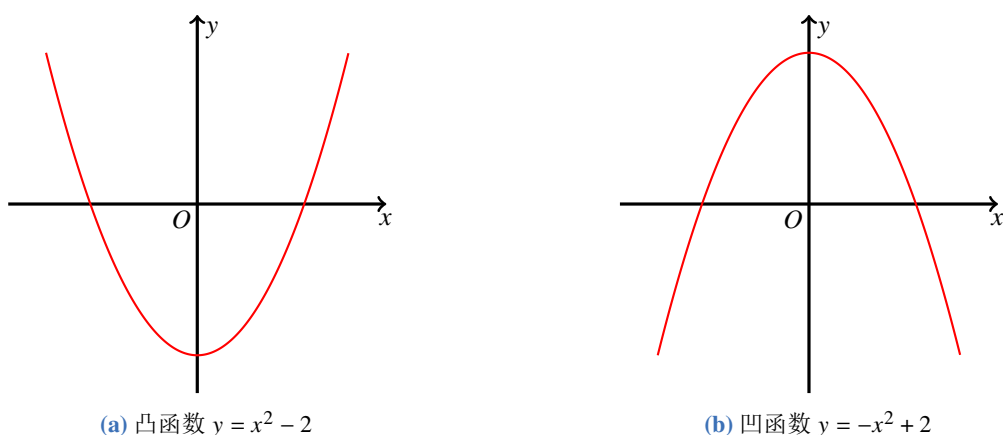


图 3.3: 一些凸函数和凹函数的图像

引理 3.1 (凸函数的三斜性)

$f(x)$ 为 I 上的凸函数的充要条件是: 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in I$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (3.33)$$

证明 ($\Rightarrow$) 由于 $f(x)$ 为 I 上的凸函数, 取 $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$, 则 $x_2 = \lambda x_3 + (1 - \lambda)x_1$, 因此

$$f(x_2) = f(\lambda x_3 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_3) + (1 - \lambda)f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1)$$

因此

$$(x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_2 - x_1)f(x_3) + (x_3 - x_2)f(x_1)$$

整理即得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

其次, 取 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, 则 $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$, 因此

$$f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

因此

$$(x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)$$

整理即得

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

($\Leftarrow$) 由于上述推导步步可逆, 以及 x_i 的任意性, 可知对任意 $\lambda \in (0, 1)$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

因此 $f(x)$ 为 I 上的凸函数. ■

定理 3.3 (可导凸函数的性质)

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则下面三个结论等价:

- 1° $f(x)$ 在 I 上是凸函数.
- 2° $f'(x)$ 是 I 上的增函数.
- 3° 对任意 $x_1, x_2 \in I$, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (3.34)$$

证明 我们采用“循环论证”的方法证明等价性.

(1° $\Rightarrow$ 2°) 在 I 上任取两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 以及充分小的正数 h . 由于 $x_1 - h < x_1 < x_2 < x_2 + h$. 由 $f(x)$ 的凸性及引理 3.1, 可知

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h}$$

由于 $f(x)$ 是 I 上的可导函数, 因此对上式令 $h \rightarrow 0^+$, 可得

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

因此 $f'(x)$ 是 I 上的增函数.

(2° $\Rightarrow$ 3°) 在 I 上任取两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 在 $[x_1, x_2]$ 区间上使用 Lagrange 中值定理, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

也即 3° 式.

(3° $\Rightarrow$ 1°) 设 x_1, x_2 为 I 上的任意两点, $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ($0 < \lambda < 1$), 以及 $x_1 - x_3 = (1 - \lambda)(x_1 - x_2)$, $x_2 - x_3 = \lambda(x_2 - x_1)$, 那么有

$$f(x_1) \geq f(x_3) + f'(x_3)(x_1 - x_3) = f(x_3) + (1 - \lambda)f'(x_3)(x_1 - x_2) \quad (3.35)$$

$$f(x_2) \geq f(x_3) + f'(x_3)(x_2 - x_3) = f(x_3) + \lambda f'(x_3)(x_2 - x_1) \quad (3.36)$$

用 λ 乘上 (3.35) 加上 $1 - \lambda$ 乘上 (3.36) 并相加, 得

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(x_3) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$
■

如果函数二阶可导, 那么判断它的凹凸性更加容易. 我们有如下定理:

定理 3.4 (二阶可导函数的凹凸性)

设 $f(x)$ 为 I 上的二阶可导函数, 则 $f(x)$ 为凸 (凹) 函数的充要条件是:

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0), \quad (x \in I) \quad (3.37)$$

定义 3.5 (拐点)

函数凹凸性发生变化的点, 称为拐点. 拐点是函数图像上的一个点, 我们一般称 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点. ♣

二阶导函数的正负可以判断函数凹凸性, 因此也能判断拐点. 但是同极值点一样, 单凭 $f''(x) = 0$ 是无法判断函数的凹凸性的, 我们还要判断其周围的点.

定理 3.5 (拐点的判断定理)

对于在 I 上二阶可导的函数 $f(x)$, $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $f(x)$ 的拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$



注 上述定理只是拐点的必要条件, 如果 $f''(x_0) = 0$, 点 $(x_0, f(x_0))$ 并不一定是 $f(x)$ 的拐点, 我们还要判断 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 附近是否变号, 即是否有

$$f(x_0 - \varepsilon)f(x_0 + \varepsilon) < 0$$

例如 $f(x) = x^3$, $(0, 0)$ 是它的拐点; 但 $g(x) = x^2$, $(0, 0)$ 就不是它的拐点。

注 上述定理只是叙述了二阶可导函数的拐点判断方法, 当不是二阶可导, 甚至不可导时, 不能使用上述定理判断函数的凹凸性。

因此, 对于二阶可导函数, 我们可以通过函数的二阶导函数的正负性来判断函数的凹凸性。

定理 3.6 (Jensen 不等式)

设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的凸函数, 则对任意的 $x_i \in [a, b], \lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots)$, 以及 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (3.38)$$



我们可以使用数学归纳法证明上述不等式, 由于证明篇幅较长, 此处不再赘述, 读者可自行尝试证明。

注 当 $n = 2$ 时, 就是凸函数的定义。

例题 3.2 证明不等式

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c$$

其中 $a, b, c > 0$

证明 要证 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c$, 只需证

$$\frac{a+b+c}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) \leq a \ln a + b \ln b + c \ln c$$

令 $f(x) = x \ln x (x > 0)$, 那么 $f'(x) = 1 + \ln x, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, 因此 $f(x)$ 为凸函数。那么使用 Jensen 不等式, 有

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{1}{3} [f(a) + f(b) + f(c)]$$

也即

$$\frac{a+b+c}{3} \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{1}{3} (a \ln a + b \ln b + c \ln c)$$

而

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \ln \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c)$$

因此

$$\frac{a+b+c}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) \leq a \ln a + b \ln b + c \ln c$$



下面我们来判断双曲函数的凹凸性:

双曲函数的凹凸性**1. $\sinh x$**

$$(\sinh x)'' = (\cosh x)' = \sinh x$$

当 $x > 0$ 时, $\sinh x > 0$, $\sinh x$ 为凸函数; 当 $x < 0$ 时, $\sinh x < 0$, $\sinh x$ 为凹函数。在 $(0, 0)$ 两侧函数凹凸性发生改变, 因此 $(0, 0)$ 为 $\sinh x$ 的拐点。

2. $\cosh x$

$$(\cosh x)'' = (\sinh x)' = \cosh x > 0$$

因此 $\cosh x$ 为凸函数。

3. $\tanh x$

$$(\tanh x)'' = (1 - \tanh^2 x)' = -2 \tanh x (1 - \tanh^2 x)$$

由于 $-1 < \tanh x < 1$, 且 $x > 0$ 时, $\tanh x > 0$; $x < 0$ 时, $\tanh x < 0$. 因此 $x > 0$, $\tanh x$ 为凹函数; 因此 $x < 0$, $\tanh x$ 为凸函数. 在 $(0, 0)$ 两侧函数凹凸性发生改变, 因此 $(0, 0)$ 为 $\tanh x$ 的拐点。

4. $\coth x$

$$(\coth x)'' = (1 - \coth^2 x)' = -2 \coth x (1 - \coth^2 x)$$

由于 $|\coth x| > 1$, 且 $x > 0$ 时, $\coth x > 0$; $x < 0$ 时, $\coth x < 0$. 因此 $x > 0$, $\coth x$ 为凸函数; 因此 $x < 0$, $\coth x$ 为凹函数. 虽然在直线 $x = 0$ 两侧函数凹凸性发生改变, 但是函数在 $x = 0$ 无定义, 因此 $\coth x$ 没有拐点。

5. $\operatorname{sech} x$

$$(\operatorname{sech} x)'' = (-\tanh x \cdot \operatorname{sech} x)' = (2 \tanh^2 x - 1) \operatorname{sech} x$$

令 $2 \tanh^2 x - 1 = 0$, 则 $x = \ln(\sqrt{2} + 1)$ 或 $x = -\ln(\sqrt{2} + 1)$.

当 $x < -\ln(\sqrt{2} + 1)$ 时, $(2 \tanh^2 x - 1) \operatorname{sech} x > 0$, $\operatorname{sech} x$ 为凸函数;

当 $-\ln(\sqrt{2} + 1) < x < \ln(\sqrt{2} + 1)$ 时, $(2 \tanh^2 x - 1) \operatorname{sech} x < 0$, $\operatorname{sech} x$ 为凹函数;

当 $x > \ln(\sqrt{2} + 1)$ 时, $(2 \tanh^2 x - 1) \operatorname{sech} x > 0$, $\operatorname{sech} x$ 为凸函数。

6. $\operatorname{csch} x$

$$(\operatorname{csch} x)'' = (-\coth x \cdot \operatorname{csch} x)' = (2 \coth^2 x - 1) \operatorname{csch} x$$

由于 $|\coth x| > 1$, 因此 $x < 0$ 时 $\operatorname{csch} x$ 为凹函数; 当 $x > 0$ 时, $\operatorname{csch} x$ 为凸函数. 虽然在直线 $x = 0$ 两侧函数凹凸性发生改变, 但是函数在 $x = 0$ 无定义, 因此 $\operatorname{csch} x$ 没有拐点。

反双曲函数的表达式比较简单, 因此也可以很容易判断它们的凹凸性。

反双曲函数的凹凸性

1. $\operatorname{arcsinh} x$

$$(\operatorname{arcsinh} x)'' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

当 $x < 0$ 时, $\operatorname{arcsinh} x$ 为凸函数, 当 $x > 0$ 时, $\operatorname{arcsinh} x$ 为凹函数. $(0, 0)$ 是它的拐点。

2. $\operatorname{arccosh} x$ ($x \geq 1$). 我们只取上半支研究, 即 $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 研究。

$$(\operatorname{arccosh} x)'' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' = -\frac{x}{(x^2 - 1)^{3/2}} < 0$$

因此 $\operatorname{arccosh} x$ 为凹函数。

3. $\operatorname{arctanh} x$ ($|x| < 1$)

$$(\operatorname{arctanh} x)'' = \left(\frac{1}{1 - x^2} \right)' = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $\operatorname{arctanh} x$ 为凹函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $\operatorname{arctanh} x$ 为凸函数. $(0, 0)$ 为它的拐点。

4. $\operatorname{arcoth} x$ ($|x| > 1$)

$$(\operatorname{arcoth} x)'' = \left(\frac{1}{1 - x^2} \right)' = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

当 $x < -1$ 时, $\operatorname{arctanh} x$ 为凹函数, 当 $x > 1$ 时, $\operatorname{arctanh} x$ 为凸函数. $\operatorname{arctanh} x$ 没有拐点。

至此, 我们可以扩充表 3.1, 得到双曲函数及其反函数性质表:

表 3.2: 双曲函数及其反函数的性质

性质 函数	定义域	值域	奇偶性	单调性	极值点	凹凸性	拐点
$\sinh x$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	奇	单调递增	/	$x < 0$, 凹函数 $x > 0$, 凸函数	$(0, 0)$
$\cosh x$	$\mathbf{R}$	$[1, +\infty)$	偶	$x < 0$, 单调递减 $x > 0$, 单调递增	$x = 0$, 极小值点	凸函数	/
$\tanh x$	$\mathbf{R}$	$(-1, 1)$	奇	单调递增	/	$x < 0$, 凸函数 $x > 0$, 凹函数	$(0, 0)$
$\coth x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	奇	$(-\infty, 0)$, 单调递减 $(0, +\infty)$, 单调递增	/	$x < 0$, 凹函数 $x > 0$, 凸函数	/
$\operatorname{sech} x$	$\mathbf{R}$	$(0, 1]$	偶	$(-\infty, 0)$, 单调递增 $(0, +\infty)$, 单调递减	$x = 0$, 极大值点	$(-\infty, -\ln(\sqrt{2}+1))$, 凸函数 $(-\ln(\sqrt{2}+1), \ln(\sqrt{2}+1))$, 凹函数 $(\ln(\sqrt{2}+1), +\infty)$, 凸函数	$(-\ln(\sqrt{2}+1), \frac{\sqrt{2}}{2})$ $(\ln(\sqrt{2}+1), \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\operatorname{csch} x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	奇	$(-\infty, 0)$, 单调递减 $(0, +\infty)$, 单调递增	/	$x < 0$, 凹函数 $x > 0$, 凸函数	/
$\operatorname{arcsinh} x$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	奇	单调递增	/	$x < 0$, 凸函数 $x > 0$, 凹函数	$(0, 0)$
$\operatorname{arcosh} x$	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	非奇非偶	$(1, +\infty)$ 单调递增	/	凹函数	/
$\operatorname{artanh} x$	$(-1, 1)$	$\mathbf{R}$	奇	$(-1, 1)$ 单调递增	/	$-1 < x < 0$, 凹函数 $0 < x < 1$, 凸函数	$(0, 0)$
$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	奇	$(-\infty, -1)$ 单调递减 $(1, +\infty)$ 单调递增	/	$(-\infty, -1)$, 凹函数 $(1, +\infty)$, 凸函数	/

3.4 双曲函数之间的关系

下面介绍双曲函数之间的关系。

定理 3.7 (双曲函数之间的关系)

1. 双曲函数基本恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (3.39)$$

2. $\sinh x$ 与 $\cosh x$ 的关系:

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad (3.40)$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} \quad (3.41)$$

3. 双曲正(余)切、余(正)割恒等式:

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (3.42)$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (3.43)$$

4. 双曲函数展开公式:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (3.44)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (3.45)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \quad (3.46)$$

5. 双曲函数二倍角公式:

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad (3.47)$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 \quad (3.48)$$

6. 棣莫弗公式:

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx) \quad (n \in \mathbf{R}) \quad (3.49)$$

7. 积化和差公式:

$$\sinh \alpha \sinh \beta = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)] \quad (3.50)$$

$$\cosh \alpha \cosh \beta = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta)] \quad (3.51)$$

$$\sinh \alpha \cosh \beta = \frac{1}{2} [\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta)] \quad (3.52)$$

$$\cosh \alpha \sinh \beta = \frac{1}{2} [\sinh(\alpha + \beta) - \sinh(\alpha - \beta)] \quad (3.53)$$

8. 和差化积公式:

$$\sinh \alpha + \sinh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3.54)$$

$$\sinh \alpha - \sinh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3.55)$$

$$\cosh \alpha + \cosh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3.56)$$

$$\cosh \alpha - \cosh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3.57)$$

9. 降幂公式:

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \quad (3.58)$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \quad (3.59)$$



证明

1. 根据定义即可

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = 1$$

2. 根据定义即可

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

3. 利用性质 1, 可快速得到结果

$$1 - \tanh^2 x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x, \quad 1 - \coth^2 x = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$$

4. 验证左边等于右边即可。先证 (3.44).

$$\text{左边} = \sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \text{左边} \end{aligned}$$

将 $-y$ 替换 y 即可得到

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

下面证明 (3.45)

$$\text{左边} = \cosh(x+y) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \text{左边} \end{aligned}$$

将 $-y$ 替换 y 即可得到

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

下面证明 (3.46), 只需利用 (3.44) 和 (3.45) 即可

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh(x \pm y)} = \frac{\sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y} = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

5. 根据定义及性质 1. 即可

$$\begin{aligned} 2 \sinh x \cosh x &= 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{x^2}}{2} = \sinh 2x \\ \cosh 2x &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 \end{aligned}$$

6. 直接验证即可

$$(\cosh x + \sinh x)^n = e^{nx} = \cosh nx + \sinh nx$$

7. 这一部分使用性质 4. 将右边展开即可, 很容易证明, 此处不再证明, 具体可见课后题 1。

8. 右边使用性质 7. 即可证明。

$$2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2} = \sinh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sinh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sinh \alpha + \sinh \beta$$

$$\begin{aligned}
2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2} &= \sinh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sinh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sinh \alpha - \sinh \beta \\
2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2} &= \cosh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cosh \alpha + \cosh \beta \\
2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2} &= \cosh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cosh \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cosh \alpha - \cosh \beta
\end{aligned}$$

9. 将 (3.48) 移项变形即可得到。 ■

如果我们在复数域 $\mathbf{C}$ 上考虑双曲函数, 那么我们能够得到双曲函数与三角函数的关系。

定理 3.8 (双曲函数与三角函数的关系)

使用欧拉公式

$$e^{iz} = i \sin z + \cos z \quad (3.60)$$

我们能够得到如下结论:

1. $\sinh(iz) = i \sin z$, $\sin(iz) = i \sinh z$
2. $\cosh(iz) = \cos z$, $\cos(iz) = \cosh z$
3. $\tanh(iz) = i \tan z$, $\tan(iz) = i \tanh z$



证明

1. 第一个等式直接验证即可:

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{i \sin z + \cos z - (-i \sin z + \cos z)}{2} = i \sin z$$

证明第二个等式需要一点技巧:

$$e^z = e^{i(-iz)} = i \sin(-iz) + \cos(-iz) = -i \sin(iz) + \cos(iz) \quad (3.61)$$

$$e^{-z} = e^{i(iz)} = i \sin(iz) + \cos(iz) \quad (3.62)$$

因此

$$i \sinh z = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \frac{-i \sin(iz) + \cos(iz) - [i \sin(iz) + \cos(iz)]}{2} = \sin(iz)$$

2. 直接验证即可:

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{i \sin z + \cos z + (-i \sin z + \cos z)}{2} = \cos z$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{-i \sin(iz) + \cos(iz) + i \sin(iz) + \cos(iz)}{2} = \cos(iz)$$

3. 利用前两条性质即可:

$$\tanh(iz) = \frac{\sinh(iz)}{\cosh(iz)} = \frac{i \sin z}{\cos z} = i \tan z, \quad \tan(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \sinh z}{\cosh z} = i \tanh z$$



三角函数有辅助角公式

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \quad \left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right) \quad (3.63)$$

那么双曲函数呢?

事实上, 双曲函数也有辅助角公式:

定理 3.9 (双曲函数辅助角公式)

$$A \sinh x + B \cosh x = \sqrt{A^2 - B^2} \sinh(x + \varphi) \quad \left(\tanh \varphi = \frac{B}{A} \right) \quad (3.64)$$



在证明之前,我们先证明这样一个结论

$$\operatorname{arctanh}(iz) = i \operatorname{arctanh} z \quad (3.65)$$

由于 $\operatorname{arctanh} x$ 和 $\tanh x$ 单调递增, 因此只需证 $\tanh(\operatorname{arctanh}(iz)) = \tanh(i \operatorname{arctanh} z)$ 即可。而

$$\tanh(\operatorname{arctanh}(iz)) = iz = \tanh(i \operatorname{arctanh} z) = i \tanh(\operatorname{arctanh} z) = iz$$

成立。

证明

$$\begin{aligned} A \sinh x + B \cosh x &= \frac{A}{i} \sin(ix) + B \cos(ix) = \sqrt{B^2 - A^2} \sin\left(ix + \arctan \frac{B}{A}i\right) \\ &= \frac{1}{i} \sqrt{A^2 - B^2} \sin\left(ix + i \arctan \frac{B}{A}\right) = \sqrt{A^2 - B^2} \sinh\left(x + \arctan \frac{B}{A}\right) \\ &= \sqrt{A^2 - B^2} \sinh(x + \varphi) \quad \left(\tanh \varphi = \frac{B}{A}\right) \end{aligned}$$

三角函数可以求和:

定理 3.10 (三角函数求和)

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (3.66)$$

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (3.67)$$

证明 我们只证 (3.66), (3.67) 同理可证。

首先, 由积化和差公式, 有 $\sin \frac{x}{2} \sin(kx) = \frac{1}{2} \left[\cos\left((k - \frac{1}{2})x\right) - \cos\left((k + \frac{1}{2})x\right) \right]$, 因此

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sum_{k=1}^n \sin x \sin(kx)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^n \left[\cos\left((k - \frac{1}{2})x\right) - \cos\left((k + \frac{1}{2})x\right) \right]}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

其中最后一步运用了和差化积公式 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

类似于三角函数, 双曲函数也可以求和, 且和三角函数求和公式几乎一模一样。

定理 3.11 (双曲函数求和)

$$\sum_{k=0}^n \sinh(kx) = \frac{\sinh \frac{(n+1)x}{2} \sinh \frac{nx}{2}}{\sinh \frac{x}{2}} \quad (3.68)$$

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{\cosh \frac{(n+1)x}{2} \sinh \frac{nx}{2}}{\sinh \frac{x}{2}} \quad (3.69)$$

证明 这里只证 (3.68). 直接根据定义, 证明左边等于右边即可:

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{k=0}^n \sinh(kx) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} - \frac{1 - e^{-n(x+x)}}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{1 + e^x - e^{(n+1)x} - e^{-x}}{2(1 - e^{nx})} \\ \text{右边} &= \frac{\sinh \frac{(n+1)x}{2} \sinh \frac{nx}{2}}{\sinh \frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}}{2} \right) \left(\frac{e^{nx/2} - e^{-nx/2}}{2} \right)}{\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2}} = \frac{(e^{(n+2)x/2} - e^{-nx/2})(e^{nx/2} - e^{-nx/2})}{2(e^x - 1)} \\ &= \frac{e^{nx+x} - 1 - e^x + e^{-nx}}{2(e^x - 1)} = \text{左边} \end{aligned}$$

最后汇总一下三角函数与双曲函数的区别与联系:

表 3.3: 三角函数与双曲函数的区别与联系

函数 公式	三角函数	双曲函数
基本恒等式	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
切一割恒等式	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$	$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$
三角展开公式	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$
二倍角公式	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$
降幂公式	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$ $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$
棣莫弗公式	$(i \sin x + \cos x)^n = i \sin(nx) + \cos(nx)$	$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$
和差化积公式	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sinh \alpha + \sinh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sinh \alpha - \sinh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cosh \alpha + \cosh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cosh \alpha - \cosh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2}$
积化和差公式	$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	$\sinh \alpha \sinh \beta = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)]$ $\cosh \alpha \cosh \beta = \frac{1}{2} [\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta)]$ $\sinh \alpha \cosh \beta = \frac{1}{2} [\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta)]$ $\cosh \alpha \sinh \beta = \frac{1}{2} [\sinh(\alpha + \beta) - \sinh(\alpha - \beta)]$
辅助角公式	$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ $\left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right)$	$A \sinh x + B \cosh x = \sqrt{A^2 - B^2} \sinh(x + \varphi)$ $\left(\tanh \varphi = \frac{B}{A} \right)$
二者相互转化	$\sinh(iz) = i \sin z, \sin(iz) = i \sinh z$ $\cosh(iz) = \cos z, \cos(iz) = \cosh z$ $\tanh(iz) = i \tan z, \tan(iz) = i \tanh z$	

3.5 利用双曲函数求解不定积分

我们学习了双曲函数的许多知识, 那双曲函数具体有什么用呢? 实际上, 双曲函数在求解不定积分上也“大有所为”。类似于三角函数, 根据双曲函数的基本恒等式, 我们可以进行双曲换元, 从而解决一部分问题。一般情况下, 能使用双曲换元求解的不定积分, 也可以使用三角换元解决。因此双曲换元并不是什么高级的知识, 也不是求解不定积分的通法, 而是一个工具, 是当其它方法失效是可以考虑的一种方法。

下面我们就以一些例题说明双曲换元的应用:

例题 3.3 求: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \ (a > 0)$

解法一:

令 $x = a \sinh t, dx = a \cosh t$, 那么

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int 1 dt = t + C = \boxed{\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C}$$

法二:

令 $x = a \tan t, dx = a \sec^2 t$, 那么

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln(|\sec t + \tan t|) = \boxed{\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C} \end{aligned}$$

例题 3.4 求: $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx \ (a > 0)$

解法一:

令 $x = a \sinh t, dx = a \cosh t$, 那么

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int a^2 \cosh^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{\sinh 2t}{4} a^2 + C \\ &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + a^2 \frac{\sinh t \cosh t}{2} + C = \boxed{\frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + C} \end{aligned}$$

当然, 本题也能三角换元。

法二:

令 $x = a \tan t, dx = a \sec^2 t dt$, 那么

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int a^2 \sec^3 t dt = a^2 \int \frac{d(\sin t)}{\cos^4 t} = a^2 \int \frac{d(\sin t)}{(1 - \sin^2 t)^2} \quad (\text{令 } u = \sin t) \\ &= \frac{a^2}{4} \int \left(\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= \frac{a^2}{4} \left(-\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \ln|u+1| - \ln|u-1| \right) + C \\ &= \frac{a^2}{4} \left(-\frac{1}{\sin t - 1} - \frac{1}{\sin t + 1} + \ln|\sin t + 1| - \ln|\sin t - 1| \right) + C \\ &= \boxed{\frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + C} \end{aligned}$$

由此可见, 三角换元并不一定是最简单的方法。

练习 3.1 求下列不定积分:

- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$
- $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

提示:

1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$$

2.

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}{2}$$

注 反双曲函数的公式和性质较多，容易混乱，一般不推荐记忆。因此从下一章开始，如果某题的一种方法使用了双曲函数，那么至少还会有一种不使用三角函数的方法。

 **笔记** 在求不定积分时，一定要注意不要改变某些函数的定义域。

第三章 练习

1. (1.) 证明 (3.50)-(3.53) 式.

2. (2.) 尝试求出 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 的幂级数展开，并与 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂级数展开做对比.

3. (3.) 推导三角函数正、余弦的三倍角公式，和双曲正、余弦函数的三倍角公式^[6].

4. (4.) 求积分^[4]:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^2} dx (|x| < 1)$$

5. (5.)(选做) 悬链线是一根密度均匀的绳子或铁链两端固定在水平杆上，受重力的作用自然下垂后形成的曲线，求悬链线方程. (提示：问题等价于求微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = C_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ 的解。)

科普：悬链线

悬链线 (Catenary) 指的是一种曲线，指两端固定的一条 (粗细与质量分布) 均匀、柔软 (不能伸长) 的链条，在重力的作用下所具有的曲线形状，例如悬索桥等，因其与两端固定的绳子在均匀引力作用下下垂相似而得名。适当选择坐标系后，悬链线的方程是一个双曲余弦函数，其标准方程为： $y = a \cosh(x/a)$ ，其中， a 为曲线顶点到横坐标轴的距离^[8].

悬链线与抛物线相似。意大利伟大的天文学家、物理学家和工程师伽利略是第一个研究悬链线的人，并错误地将其形状认定为抛物线。1691 年，莱布尼茨、惠根斯和瑞士数学家约翰·伯努利分别得出了正确的形状。他们都是为了响应瑞士数学家雅各布·伯努利 (约翰的哥哥) 提出的一项挑战，即得到“悬链线”方程^[9].

第四章 分部积分法与表格积分法

内容提要

□ 分部积分法

□ 表格积分法

我们在前面几章我们学习了使用换元法求解不定积分的方法，但是对于一些不定积分，只使用换元可能很难做出来。为了让积分形式更加“简洁”，本章将介绍不定积分中的一个比较重要的方法——分部积分法，之后，将对分部积分法进行延伸拓展，推出“表格积分法”。

4.1 分部积分法

从方法的名称就可以看出，“分部”即将被积函数分为两部分，然后也可以把不定积分变为两部分计算，事实也的确如此。因此，分部积分法一般用于被积函数可以拆成两个函数乘积的形式。

分部积分法的思想来源于乘积求导的逆运算，我们知道，对于可导函数 f, g ，有

$$(fg)' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \quad (4.1)$$

如果各项均可积，那么两边同时取不定积分，有：

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int g'(x)f(x)dx \quad (4.2)$$

注 左边不定积分的常数 C 已经蕴含在等式右边的不定积分里，从本节开始，如无特别说明，常数将不再明确写出（即取 $C = 0$ ）。

将式4.2稍做变形，即可得到分部积分法的核心定理：

定理 4.1 (分部积分法)

如果 $f'(x)g(x)$ 可积，且 $\int f(x)g'(x)dx$ 存在，那么有：

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx \quad (4.3)$$

注 f, g 的地位是等价的，因此在满足前提条件下，可以任选一个因式作为 f ，另一个作为 g 。

 **笔记** 上述公式亦可写做：

$$\int gd(f) = fg - \int fd(g) \quad (4.4)$$

使用时要理解其含义，可以使用上式帮助记忆：即将 f 从微分算子后面拿出来 (fg)，再减去把 g 放入微分算子后的值 ($\int gd(f)$)。

 **笔记** 选取合适的 f 和 g 能够大幅简化不定积分的运算，一般情况下 f 的选择遵循“反对幂指三”规律。

我们会在后面详细说明一下如何选取 f ，不过在此之前，我们先看几道例题，理解一下分部积分公式是如何使用的。

例题 4.1 求不定积分 $\int \ln x dx$

解

$$\int \ln x dx = \int \ln x(x)' dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = \boxed{x \ln x - x + C}$$

例题 4.2 求不定积分 $\int \arctan x dx$

解

$$\int \arctan x dx = \int \arctan x d(x) = x \arctan x - \int x d(\arctan x)$$

$$\begin{aligned}
 &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= \boxed{x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}
 \end{aligned}$$

注 由上面两个例子我们可以发现, 有时候看着只有一个因式(函数), 但却可以巧妙利用“1”来简化计算。因此不能认为只有一个函数就不能使用分部积分法。

读者应该已经对分部积分法有一定的认识了, 下面我将给出更一般一些的例子, 以增加理解。

例题 4.3 求不定积分 $\int x e^x dx$

解

$$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = \boxed{(x-1)e^x + C}$$

例题 4.4 求 $\int x^2 e^x dx$

解

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^x dx &= \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\
 &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\
 &= \boxed{(x^2 - 2x + 2)e^x + C}
 \end{aligned}$$

例题 4.5 求 $\int e^x \cos x dx$

解 法一:

$$\begin{aligned}
 \int e^x \cos x dx &= \int \cos x d(e^x) = e^x \cos x - \int e^x d(\cos x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\
 &= e^x \cos x + \int \sin x d(e^x) = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) \\
 &= e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx
 \end{aligned}$$

因此

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

法二:

$$\begin{aligned}
 \int e^x \cos x dx &= \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\
 &= e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x d(e^x) \\
 &= e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx
 \end{aligned}$$

因此

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

注 从上面的几个例题我们发现, 有时候分部积分需要使用多次才能求出不定积分, 有时候多次分部积分会出现和原式相似的式子, 合并以求出结果。因此, 我们不能认为分部积分只能使用一次, 不能认为分部积分会一直循环出现某个表达式(一般情况下不会出现)。

 **笔记** 在使用分部积分时, 不能对刚才已经分部过的那部分再次使用分部积分, 否则会变为原样。一般来说, 由于

$$\int f d(g) = fg - \int g d(f) = fg - \left(gf - \int f d(g) \right) = \int f d(g)$$

为恒等式, 因此这样分部两次, 使得结果没有任何变化。

一般来说, 假设我们要求 $\int x^2 e^x dx$, 第一步把 e^x 放进微分算子使用分部积分公式, 得到 $\int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2)$, 那这时候我们就不能对 $\int e^x d(x^2)$ 使用分部积分公式了, 否则会得出 $\int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) =$

$x^2 e^x - (e^x x^2 - \int x^2 d(e^x)) = \int x^2 d(e^x)$ 的恒等式!

 **笔记** 分部积分法在求某些不定积分的通项时也很有用，我们可以通过不断地递推，求出函数列¹ 比如最后，我们回收开头提到的“反对幂指三”。

4.2 表格积分法

¹函数列：函数列的定义可以类比数列，数列是按照编号形成的一列数，而函数列是按照编号形成的一列函数。例如 $f_n(x) = x^n$ ，该函数列也可写为 $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ 。

习题解答

第零章 习题解答

1. (1.)

解 (1)

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \\ &= \boxed{-f'(x_0)} \end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{f'(x_0)}$$

(3)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \boxed{2f'(x_0)}$$

2. (2.)

解 (1) 类似于 $|x|$, 我们可以构造

$$f(x) = \prod_{k=1}^n |x - a_k| = |x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdots |x - a_n|$$

(2) 考虑狄利克雷函数 $D(x)$, 我们知道

$$y = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

其仅在 $x = 0$ 处连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = 0$$

因此 y 仅在 $x = 0$ 可导。类似的, 仿照刚才的做法, 令

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \prod_{i=1}^n (x - a_i)^2, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

我们立得 $f(x)$ 仅在 $x = a_i$ 可导, 且 $f'(a_i) = 0$ 。

3. (3.)

解 (1) 要使 f 在 $x = 0$ 处连续, 只需

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \sin \frac{1}{x} = 0$$

当 $m \in \mathbb{N}_+$ 时, 已经有

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \sin \frac{1}{x} = 0$$

因此 $m \in \mathbb{N}_+$

(2) 根据导数的定义, 我们需要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m \sin \frac{1}{x} - 0}{x}$$

即极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{m-1} \sin \frac{1}{x}$ 存在, 因此 $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$

4. (4.)

解 (1) 当 $k < x < k+1, k \in \mathbb{N}$ 时, $[x] = 0$, 而当 $x = k$ 时 $y = [x]$ 间断, 因此导数不存在。故

$$y' = \begin{cases} 0, & k < x < k+1 \\ \text{不存在}, & x = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(2) 当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi, y' = \cos x$; 当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, y' = -\cos x$; 当 $x = k\pi$ 时, 极限

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{|\sin(x)| - |\sin(k\pi)|}{x - k\pi}$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

极限不存在 (左极限为 -1 , 右极限为 1), 因此

$$y' = \begin{cases} \cos x, & 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -\cos x, & (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \\ \text{不存在}, & x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(3) 运用乘积求导法则, 马上得到

$$y' = \sum_{k=1}^n \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} (x + a_i)$$

5. (5.)

解 根据导数的定义即可。

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(0 + 0x + o(x)) \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} \sin \frac{1}{x} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

6. (6.)

证明 首先 $f'(0) = 1, f(x)$ 连续, 因此 $f(x)$ 不是常值函数。令 $x_1 = x, x_2 = 0$, 得

$$f(x) = f(x) \cdot f(0)$$

因此 $f(0) = 0$ 那么

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(0) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

7. (7.)

证明

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \\
&= 2f'(x_0)
\end{aligned}$$

8. (8.)

证明 首先

$$\frac{d}{dx} f(x^2) = f'(x^2) 2x$$

其次

$$\frac{d}{dx} f^2(x) = 2f(x)f'(x)$$

那么

$$2f'(1) = 2f(1)f'(1)$$

因此必有 $f'(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$

9. (9.)

证明 首先

$$\frac{d}{dx} f(x^2) = f'(x^2) 2x$$

其次

$$\frac{d^2}{dx^2} f^2(x) = [2f(x)f'(x)]' = 2[(f'(x))^2 + f(x)f''(x)]$$

那么

$$\left. \frac{d}{dx} f(x^2) \right|_{x=1} = 0 = \left. \frac{d^2}{dx^2} f^2(x) \right|_{x=1}$$

10. (10.)

解 (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-3a \sin t \cos^2 t}{3a \cos t \sin^2 t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

那么

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)}{dx} = \frac{d\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{3a \cos t \sin^2 t} = \boxed{\frac{1}{3a \cos t \sin^4 t}}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\cos t + \sin t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$$

那么

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\right)/dt}{dx/dt} = -\frac{2}{e^t(\sin t + \cos t)(1 + \sin 2t)} = \boxed{-\frac{2}{e^t}(1 + \sin 2t)^{-3/2}}$$

11. (11.)

解 (1) $uv = e^x \ln x$, 那么

$$(e^x \ln x)^{(3)} = \left[e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \right]'' = \left[e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right]' = \left[e^x \left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \right]$$

因此

$$d^3(uv) = \left[e^x \left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \right] dx^3$$

$\frac{u}{v} = \frac{\ln x}{e^x}$, 那么

$$\left(\frac{\ln x}{e^x} \right)''' = \left(\frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} \right)'' = \left(\frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ln x}{e^x} \right)' = \boxed{\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} - \ln x \right) e^{-x}}$$

(2) $uv = e^{x/2} \cos 2x$, 那么

$$\begin{aligned} (e^{x/2} \cos 2x)''' &= \left[e^{x/2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x \right) \right]'' \\ &= \left[e^{x/2} \left(-2 \sin 2x - \frac{15}{4} \cos 2x \right) \right]' = \boxed{e^{x/2} \left(\frac{13}{2} \sin 2x - \frac{47}{8} \cos 2x \right)} \end{aligned}$$

$\frac{u}{v} = \frac{e^{x/2}}{\cos 2x}$, 那么

$$\left(\frac{e^{x/2}}{\cos 2x} \right)'' = \left(e^{x/2} \frac{\frac{1}{2} \cos 2x + 2 \sin 2x}{\cos^2 2x} \right)' = \boxed{\frac{-\frac{15}{4} \cos^2 x + 2 \sin 2x \cos 2x + 8}{\cos^3 x}}$$

12. (12.)

解 (1) 证明: 首先

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

那么

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = -\frac{2x}{1+x^2} + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} = 0$$

(2) 首先, 我们知道 $y'(0) = 1, y''(0) = 0$ 。由于 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 因此 $(1+x^2)y' = 1$, 对该式两边同时求 n 阶导, 得

$$\begin{aligned} [(1+x^2)y']^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (1+x^2)^{(k)} y^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^2 C_n^k (1+x^2)^{(k)} y^{(n-k+1)} \\ &= (1+x^2)y^{(n+1)} + 2nx y^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0 \end{aligned}$$

令 $x = 0$, 则

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0), \quad y^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$$

当 n 为奇数时

$$\begin{aligned} y^{(n)}(0) &= -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) = (-1)^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)y^{(n-4)}(0) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!y'(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! \end{aligned}$$

当 n 为偶数时

$$\begin{aligned} y^{(n)}(0) &= -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) = (-1)^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)y^{(n-4)}(0) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-2)!y''(0) = 0 \end{aligned}$$

因此

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

13. (13.)

解 (1). 证明: 由于 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y'' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 因此

$$y'' = \frac{x}{1-x^2} y', (1-x^2)y'' = xy'$$

对上式两边同时求 n 阶导, 得

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (1-x^2)^{(k)} y^{(n-k+2)} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{(k)} y^{(n-k+1)}$$

即

$$(1-x^2)y^{(n+2)} + -2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

整理即得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0 (n \geq 0)$$

(2). 对上式令 $x=0$, 得

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0) = n^2(n-2)^2 y^{(n-2)}(0) = \dots$$

当 n 为偶数时 $n^2 y^{(n)}(0) = n^2(n-2)^2 \dots 2^2 y''(0) = 0, y^{(n)}(0) = 0$

当 n 为奇数时 $n^2 y^{(n)}(0) = n^2(n-2)^2 \dots 1^2 y'(0) = n!!, y^{(n)}(0) = [(n-1)!!]^2$

因此

$$y^{(n)} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ [(n-1)!!]^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

14. (14.)

证明 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{k}{n^2}$ 处使用带有同阶无穷小的泰勒公式展开, 得

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + f'(0) \frac{k}{n^2} + O\left(\frac{k^3}{n^6}\right) = \frac{k}{n^2} f'(0) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

那么

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = f'(0) \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} f'(0)$$

15. (15.)

解 (1) 两边同时对 x 求导, 可得

$$2xy + x^2 y' + 12x^3 y^3 + 9x^4 y^2 y' = 0$$

因此

$$y' = -\frac{2xy + 12x^3 y^3}{x^2 + 9x^4 y^2}$$

(2) 两边同时对 x 求导, 可得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \boxed{\frac{y'x-y}{x^2+y^2}}$$

求得

$$y' = \boxed{\frac{x+y}{x-y}}$$

(3) 两边同时对 x 求导, 可得

$$-ye^{-xy} + 2z_x - z_x e^z = 0$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \boxed{\frac{ye^{-xy}}{2 - e^z}}$$

两边同时对 y 求导, 可得

$$-xe^{-xy} + 2z_y - z_y e^z = 0$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \boxed{\frac{xe^{-xy}}{2 - e^z}}$$

16. (16.)

证明 事实上

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} + \left(\frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} - \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \right) \frac{a_n - x_0}{b_n - a_n}$$

而 $a_n < x_0 < b_n$, 因此 $\frac{a_n - x_0}{b_n - a_n}$ 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} = f'(x_0)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

■

17. (17.)

解 先求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, 对 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 两边同时对 x 求导, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0(*)$$

因此

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

对 (*) 式两边继续对 x 求导, 得

$$2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$$

因此

$$y'' = 6 \frac{x^2 + y^2 - xy}{(x - 2y)^3} = \frac{1}{(x - 2y)^3}$$

那么

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2yy' = \boxed{2x + 2y \frac{2x - y}{x - 2y}}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \boxed{2 + \frac{2(2x - y)^2}{(x - 2y)^2} + \frac{12y}{(x - 2y)^3}}$$

18. (18.)

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = A$$

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{f(3x) - f(x)}{x} - A \right| < \varepsilon$ 即

$$x(A - \varepsilon) < f(3x) - f(x) < x(A + \varepsilon)$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{x}{3}(A-\varepsilon) &< f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{x}{3}(A+\varepsilon) \\ \frac{x}{3^2}(A-\varepsilon) &< f\left(\frac{x}{3}\right) - f\left(\frac{x}{3^2}\right) < \frac{x}{3^2}(A+\varepsilon) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{x}{3^n}(A-\varepsilon) &< f\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{3^n}\right) < \frac{x}{3^n}(A+\varepsilon)\end{aligned}$$

累加, 得

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)x(A-\varepsilon) < f(x) - f\left(\frac{x}{3^n}\right) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)x(A+\varepsilon)$$

对上式对 n 取极限, 得

$$\frac{1}{2}x(A-\varepsilon) \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}x(A+\varepsilon)$$

因此

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{A}{2} \right| \leq \varepsilon$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \boxed{\frac{A}{2}}$$

注 本题不能凑导数的定义

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2f'(0)$$

或使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f'(3x) - f'(x)}{1} = 2f'(0)$$

上述方法均是错误的, 因为我们不知道 $f'(0)$ 是否存在。

19. (19.)

解 证明: **法一:** 设 S 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有排列集合。 $\sigma'_k = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in S$ 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列, 逆序数为 m , 那么根据行列式的定义, 有

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\sigma' \in S} (-1)^m f_{1\sigma_1}(x) f_{2\sigma_2}(x) \dots f_{n\sigma_n}(x)$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ = \frac{d}{dx} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{1\sigma_1}(x) f_{2\sigma_2}(x) \dots f_{n\sigma_n}(x) \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{d}{dx} [f_{1\sigma_1}(x) f_{2\sigma_2}(x) \dots f_{n\sigma_n}(x)] \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\sigma) [f_{1\sigma_1}(x) f_{2\sigma_2}(x) \dots f'_{k\sigma_k}(x) \dots f_{n\sigma_n}(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) [f_{1\sigma_1}(x) f_{2\sigma_2}(x) \cdots f'_{k\sigma_k}(x) \cdots f_{n\sigma_n}(x)] \\
&= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

法二: 令

$$F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}, f_{ij} = f_{ij}(x) (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

由复合函数求导法则

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial f_{ij}} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial f_{ij}} \left(\sum_{k=1}^n f_{kj} A_{kj} \right) \frac{\partial f_{ij}}{\partial x} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial f_{ij}} f_{kj} A_{kj} \right) \frac{\partial f_{ij}}{\partial x} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x} \\
&= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(法三) 使用数学归纳法.

(1) 当 $n = 1, 2$ 时是正确的;

(2) 假设 $n = m \geq 3$ 时也成立, 即

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mm}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^m \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1m}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{km}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mm}(x) \end{vmatrix}.$$

那么

$$F_{m+1} = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1,m+1}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2,m+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m+1,1}(x) & f_{m+1,2}(x) & \cdots & f_{m+1,m+1}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{m+1} f_{k,m+1} A_{k,m+1}$$

设 $L_{A_{k,m+1},j}$ 表示代数余子式 $A_{k,m+1}$ 中第 j 列变成了原来的导数, 因此

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \sum_{k=1}^{m+1} f'_{k,m+1} A_{k,m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} f_{k,m+1} A'_{k,m+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} f'_{k,m+1} A_{k,m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} f_{k,m+1} \sum_{j=1}^m L_{A_{k,m+1},j} \\ &= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f'_{1,m+1}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f'_{2,m+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m+1,1}(x) & f_{m+1,2}(x) & \cdots & f'_{m+1,m+1}(x) \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^m \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{1k}(x) & \cdots & f_{1,m+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{l1}(x) & f'_{lk}(x) & \cdots & f_{l,m+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m+1,1}(x) & f'_{m+1,k}(x) & \cdots & f_{m+1,m+1}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

因此, 由上可知结论成立。 ■

下面求 (1),(2)

(1)

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -3 & x & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -3 & x \end{vmatrix} \\ &= x(x+1) + 9 + (x-3)(x+1) + 4 + x(x-3) + 3 \\ &= \boxed{3x^2 - 4x + 13} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2x & x^3 \\ 1 & 2 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & 3x^2 \\ 1 & 2x & 6x \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} + 6x \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 2x & 6x \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3x^2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \boxed{6x^2}$$

第一章 习题解答

1. (1.)

证明 (1) 由于 $[f(x)]' = f'(x)$, 因此

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

(2) 由于 $df(x) = f'(x)dx$, 由 (1) 可知

$$\int df(x)dx = f(x) + C$$

■

2. (2.)

证明 由于 $f(x)$ 为奇函数, 因此 $f(-x) = -f(x)$, 而 $f(x)$ 连续, 因此存在原函数, 设为 $F(x)$, 那么

$$F'(x) = f(x) = -f(-x) = [F(-x)]'$$

因此 $F(x) = F(-x) + C$, 代入 $x = 0$, 得 $C = 0$, 因此

$$F(x) = F(-x)$$

即 $F(x)$ 是偶函数.

而当 $f(x)$ 为偶函数时, $f(-x) = f(x)$,

$$F'(x) = f(x) = f(-x) = F'(-x) = -[F(-x)]'$$

因此 $F(x) = -F(-x) + C$, 此时 C 不一定为 0, 因此 $F(x)$ 不一定为奇函数, 具体例子可见例 1.3 的第 10 题. ■

3. (3.)

证明 法一:

反证法. 假设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 由于 $F'(x) = f(x)$, 可知 $F(x)$ 可导, 则一定连续. 设 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点, 但我们有

$$f(x_0) = F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

这与 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点矛盾, 因此 $f(x)$ 没有原函数.

法二: 由于 $F'(x) = f(x)$, 因此该问题等价于证明: 导函数没有第一类间断点. 使用反证法. 假设 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$, 设 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 不妨设右极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \neq F'(x_0) = f(x_0)$$

由导数的定义, 知

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \neq A$$

另一方面, 由 Lagrange 中值定理, 知存在介于 x 与 x_0 之间的 ξ , 使得

$$F(x) - F(x_0) = f(\xi)(x - x_0)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(\xi) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

矛盾, 因此 $f(x)$ 不存在第一类间断点. ■

4. (4.)

解 取

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

那么

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

此时 $f(x)$ 有原函数 $F(x) + C$.

5. (5.)

解 有原函数的例子上题已说过, 我们现在举没有原函数的例子。

令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 如果它有原函数 $F(x)$, 那么 $F'(x) = f(x)$, 由 $F'(-1) = -1 < 0$, $F'(1) = 1 > 0$, 由 Darboux 定理, 知存在 $-1 < \xi < 1$, 使得

$$F'(\xi) = f(\xi) = 0$$

但 $f(x) \neq 0$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 没有原函数.

6. (6.)

解 (1)

$$\int (x^3 + 2x^2 - 5\sqrt{x}) dx = \boxed{\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^{3/2} + C}$$

(2)

$$\int (\sin x + 3e^x) dx = \boxed{-\cos x + 3e^x + C}$$

(3)

$$\int (x^a + a^x) dx = \boxed{\frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

(4)

$$\int (2 + \cot^2 x) dx = \boxed{2x - \csc^2 x + C}$$

(5)

$$\int (2 \csc^2 x - \sec x \tan x) dx = \int (2 + 2 \cot^2 x - \sec x \tan x) dx = \boxed{2x - 2 \csc^2 x - \sec x + C}$$

(6)

$$\int (x^2 - 2)^3 dx = \int (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) dx = \boxed{\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{5}x^5 + 4x^3 - 8x + C}$$

(7)

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int (x^2 + x^{-2} + 2) dx = \boxed{\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}}$$

(8)

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} + x^{-2/3} + x^{-7/6} + 2 \right) dx = \boxed{\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + 3x^{1/3} - 6x^{-1/6} + 2x + C}$$

7. (7.)

解 (1)

$$\int \left(2^x + \frac{1}{3^x} \right)^2 dx = \int \left(4^x + 9^{-x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x \right) dx = \boxed{\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{9^{-x}}{\ln 9} + 2 \cdot \frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} + C}$$

(2)

$$\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx = \int \left(2 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^x \right) dx = \boxed{2x - 5 \cdot \frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} + C}$$

(3)

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\sin x + \cos x) dx = \boxed{\sin x - \cos x + C}$$

(4)

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \boxed{2 \arctan x - 3 \arcsin x + C}$$

(5)

$$\int (1-x^2) \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int (1-x^2) x^{3/4} dx = \int (x^{3/4} - x^{11/4}) dx = \boxed{\frac{4}{7}x^{7/4} - \frac{4}{15}x^{15/4} + C}$$

(6)

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \sec^2 x) dx = \int (\cot^2 x - \tan^2 x) dx = \boxed{-\csc x - \sec x + C}$$

(7)

$$\int \left(1 - x + x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \boxed{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^{1/3} + C}$$

(8)

$$\int \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int (x^2 - 2x^{1/2} + x^{-1}) dx = \boxed{\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^{3/2} + \ln |x| + C}$$

8. (8.)

解 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int x^{-1/2} dx = \boxed{\sqrt{\frac{2x}{g}} + C} \quad (g \text{ 为正常数})$$

(2)

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 9^x + 2 \cdot 6^x) dx = \boxed{\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{9^x}{\ln 9} + 2 \frac{6^x}{\ln 6} + C}$$

(3)

$$\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \boxed{\frac{3}{2} \arcsin x + C}$$

(4)

$$\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \boxed{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \arctan x + C}$$

(5)

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \boxed{\tan x - x + C}$$

(6)

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \boxed{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C}$$

(7)

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \boxed{\cos x + \sin x + C}$$

(8)

$$\int 10^t \cdot 3^{2t} dt = \int 90^t dt = \boxed{\frac{90^t}{\ln 90} + C}$$

9. (9.)

解 (1)

$$\int \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}} dx = \int x^{31/32} dx = \boxed{\frac{32}{63} x^{31/32} + C}$$

(2)

$$\int \left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} \right) dx = \int \left(\frac{x-1+2}{1-x} + \frac{-1-x+2}{x+1} \right) dx = \int \left(-2 + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right) dx = \boxed{-2x + 2 \ln |x+1| - 2 \ln |x-1| + C}$$

(3)

$$\int (\cos x + \sin x)^2 dx = \int (1 + \sin 2x) dx = \boxed{x - \frac{1}{2} \cos 2x + C}$$

(4)

$$\int \cos x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x) dx = \boxed{\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + C}$$

(5)

$$\int (e^x - e^{-x})^3 dx = \int (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) dx = \boxed{\frac{1}{3} e^{3x} - 3e^x - 3e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + C}$$

(6)

$$\int (e^x + e^{-x})^3 dx = \int (e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}) dx = \boxed{\frac{1}{3} e^{3x} + 3e^x - 3e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + C}$$

(7)

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \left(2 \cdot 5^{-x} - \frac{1}{5} 2^{-x} \right) dx = \boxed{-2 \cdot \frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C}$$

(8)

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \boxed{\ln |x| - \frac{1}{4} x^{-4} + C}$$

10. (10.)

解 (1) 令

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \text{ or } x < -1 \\ -x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

那么

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + C_1, & x > 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_2, & x < -1 \\ -\frac{1}{3}x^3 + x + C_3, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

由于 $F(x)$ 连续, 那么

$$\frac{1}{3} - 1 + C_3 = -\frac{1}{3} + 1 + C_2$$

$$-\frac{1}{3} + 1 + C_3 = \frac{1}{3} - 1 + C_1$$

因此

$$C_1 = C_3 + \frac{4}{3}, C_2 = C_3 - \frac{4}{3}$$

于是

$$\int |x^2 - 1| dx = F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + C_3 + \frac{4}{3}, & x > 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + C_3 - \frac{4}{3}, & x < -1 \\ -\frac{1}{3}x^3 + x + C_3, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(2) 令

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

($k \in \mathbb{Z}$) 那么

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + C_k, & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\sin x + C'_k, & \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

($k \in \mathbb{Z}$) 由于 $F(x)$ 连续, 那么

$$1 + C_k = -1 + C'_k$$

$$1 + C'_{k-1} = -1 + C_k$$

因此

$$C_k = C'_k - 2, C'_k = C'_{k-1} + 4$$

故一旦确定了一个 C_i 或 C'_j , 那么 C_k 和 C'_k 均被确定了。因此

$$\int |\cos x| dx = F(x) = \begin{cases} \sin x + C'_k - 2, & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\sin x + C'_k, & \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

($k \in \mathbb{Z}$) 其中 $C'_k = C'_{k-1} + 4$.

11. (11.)

解 由题, 知 $y' = \frac{1}{x}$, $y = \ln|x| + C$ 由于该曲线过 $(e, -1)$, 因此 $-1 = 1 + C$, $C = -2$ 故

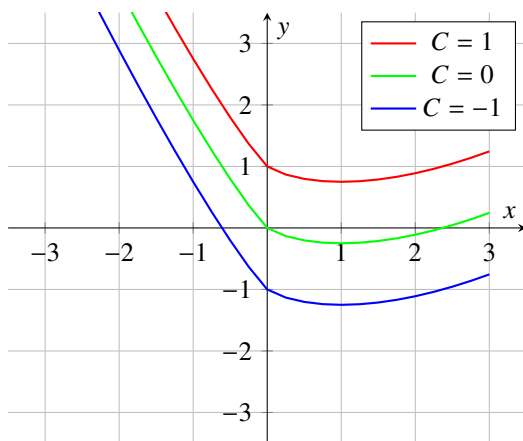
$$y = f(x) = \ln|x| - 2$$

12. (12.)

解 (1) 由题, 知 $f'(x) = \sqrt[3]{x} - 1$, 因此

$$f(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} - x + C$$

做出示意图如图所示:



(2) 代入 $(1, 1)$, 得 $\frac{3}{4} - 1 + C = 1$, 得 $C = \frac{5}{4}$, 因此

$$f(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} - x + \frac{5}{4}$$

第二章 习题解答

1. (1.)

解 由题知 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{x}\right) d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + C$$

2. (2.)

证明 事实上, 令 $h(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, 则

$$h'(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} (x - x_j)$$

因此

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) + C$$

由于 $f(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i$, 因此 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, 那么 $f(x)$ 有 n 个互异的根. ■

3. (3.)

解 令 $\sin^2 x = t$, 则

$$f'(t) = 1 - 2\sin^2 x + \tan^2 x = \frac{1}{1 - \sin^2 x} - 2\sin^2 x = \frac{1}{1 - t} - 2t$$

因此

$$f(t) = \int \left(\frac{1}{1-t} - 2t \right) dt = -\ln|1-t| - t^2 + C$$

因此 $f(x) = \boxed{-\ln|1-x| - t^2 + C}$.

4. (4.)

解 (1)

$$\int (2+x)^n dx = \int (2+x)^n d(2+x) = \boxed{\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1} + C}$$

(2)

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos(\frac{x}{2})} d\left(\frac{x}{2}\right) = \boxed{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + C}$$

(3)

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int (\sec^2 x - \sec x \cdot \tan x) dx = \boxed{\tan x - \sec x + C}$$

注 上题也可使用此方法配凑, 只需上下同乘以 $1 - \cos x$ 即可。

(4)

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \boxed{\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + C}$$

(5) 令 $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\int \frac{\cos^5 \theta}{\sin \theta} \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{5} \sin^5 \theta + \frac{2}{3} \sin^3 \theta - \sin \theta + C \\ &= \boxed{-\frac{1}{5} (\sqrt{1-x^2})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{1-x^2})^3 - \sqrt{1-x^2} + C} \end{aligned}$$

(6) 令 $x = e^t$, $dx = e^t dt$, 则

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{d(\ln t)}{\ln t} = \ln |\ln t| + C = \boxed{\ln |\ln \ln x| + C}$$

(7)

$$\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx = \int \frac{\ln 4x - \ln 2}{x \ln 4x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \ln 2 \int \frac{d(\ln 4x)}{\ln 4x} = \boxed{\ln x - \ln 2 \cdot \ln |\ln 4x| + C}$$

(8) 令 $x = \sec t$, $dx = \sec t \cdot \tan t dt$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\tan^4 t \cdot \sec^4 t} dt \\ &= \int \cos^3 t dt = \int (1 - \sin^2 t) d(\sin t) \\ &= \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3 + C} \end{aligned}$$

5. (5.)

解 (1)

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2+1-x^2}{1+x^4} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} d\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} d\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} d\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} d\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4} \arctan\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln\left|\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right| + C}
\end{aligned}$$

(2)

$$\int \frac{1}{x \ln x (1 + \ln \ln x)} dx = \int \frac{1}{1 + \ln \ln x} d(\ln \ln x) = \boxed{\ln |1 + \ln \ln x| + C}$$

(3)

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int \arcsin \sqrt{x} d(\arcsin \sqrt{x}) = \boxed{\arcsin^2 \sqrt{x} + C}$$

(4)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = 2 \arcsin \sqrt{x} + C$$

(5)

$$\int \frac{x \tan(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \tan(\sqrt{1-x^2}) d(\sqrt{1-x^2}) = \boxed{\ln |\cos \tan(\sqrt{1-x^2})| + C}$$

(6)

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1}{1+x^2}} dx = \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1} d[\ln(x + \sqrt{1+x^2})] = \boxed{\frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1]^{3/2} + C}$$

(7)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x + \arctan^2 x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(x^2) + \int \arctan^2 x d(\arctan x) \\
&= \boxed{\frac{1}{2} \ln |1+x^2| + \frac{1}{3} \arctan^3 x + C}
\end{aligned}$$

(8)

$$\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{1 + \sec^2 x} dx = \int \frac{1}{2 + \tan^2 x} d(\tan x) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

6. (6.)

解 (1) 令 $x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt$, 则

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{(1+t)t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln t - \ln(t+1) + C = \boxed{x - \ln(e^x + 1) + C}$$

(2)

$$\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)} dx = - \int [\ln(1+x) - \ln x] d[\ln(1+x) - \ln x] = \boxed{-\frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln x]^2 + C}$$

(3) 令 $t = \ln x, dx = e^t dt$, 则

$$\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\ln^2 x)} dx = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t - \arctan t + C = \boxed{\ln x - \arctan(\ln x) + C}$$

(4)

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \ln(\tan x) d[\ln(\tan x)] = \boxed{\frac{1}{4} \ln^2(\tan x) + C}$$

(5)

$$\frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx = \int \frac{x \sec^2 x + \tan x}{(1 - x \tan x)^2} = - \int \frac{1}{(1 - x \tan x)^2} d(1 - x \tan x) = \boxed{\frac{1}{1 - x \tan x} + C}$$

(6)

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} dx = \int \frac{d(e^{\sin x} \cos x)}{e^{\sin x} \cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} = \ln \left| \frac{e^{\sin x} \cos x}{1 + e^{\sin x} \cos x} \right| + C$$

(7) 由于 $\left[\frac{e^x}{1 + \cos x} \right]' = \frac{1 + \sin x + \cos x}{(1 + \cos x)^2} e^x$ 因此

$$\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{(1 + \cos x)^2} e^x dx = \boxed{\frac{e^x}{1 + \cos x} + C}$$

(8)

$$\int \frac{x^2 - 1}{x \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1}} d\left(x + \frac{1}{x}\right) = \boxed{\operatorname{arcsinh}\left(x + \frac{1}{x}\right) + C}$$

注 关于 $\operatorname{arcsinh} x$ 函数的介绍, 可以看第三章双曲函数。

注 本题结果也可写成

$$\int \frac{x^2 - 1}{x \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} dx = \ln \left| \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}{x} \right| + C$$

7. (7.)

解 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 则 $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \int \frac{(t^3-1)^2}{(t^3+1)^2 - (t^3-1)^2} \cdot t \cdot -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt \\ &= \int \frac{-6t^3}{4t^3} dt = -\frac{3}{2}t + C = \boxed{-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C} \end{aligned}$$

8. (8.)

解 注意到:

$$x^n = n! \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)' \right]$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} dx &= \int \frac{n! \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)' \right]}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} dx \\ &= n! \left[\int 1 dx - \int \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} d \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \right] \\ &= \boxed{n! \left(x - \ln \left| 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right| \right) + C} \end{aligned}$$

9. (9.)

解 令 $1 - x^2 = t$, 则

$$\int x f(1 - x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1 - x^2) d(1 - x^2) = -\frac{1}{2} \int f(t) dt = -\frac{1}{2} [\ln(\sin t) + C] = -\frac{1}{2} \ln |\sin(1 - x^2)| + C$$

10. (10.)

证明

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x f'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx &= \int \frac{e^x [x f'(x) - (1+x)f(x)]}{(x e^x)^2} dx \\
 &= \int \frac{x e^x f'(x) - (1+x)e^x f(x)}{(x e^x)^2} dx = \int \frac{x e^x f'(x) - (x e^x)' f(x)}{(x e^x)^2} dx \\
 &= \int \left(\frac{f(x)}{x e^x} \right)' dx = \frac{f(x)}{x e^x} + C
 \end{aligned}$$

第三章 习题解答

1. (1.)

证明 直接将右边展开即可.

对于 (3.50), 有:

$$\text{右边} = \frac{1}{2} [(\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) - (\cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta)] = \sinh \alpha \sinh \beta = \text{左边}$$

对于 (3.51), 有:

$$\text{右边} = \frac{1}{2} [(\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) + (\cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta)] = \cosh \alpha \cosh \beta = \text{左边}$$

对于 (3.52), 有:

$$\text{右边} = \frac{1}{2} [(\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta) + (\sinh \alpha \cosh \beta - \cosh \alpha \sinh \beta)] = \sinh \alpha \cosh \beta = \text{左边}$$

对于 (3.53), 有:

$$\text{右边} = \frac{1}{2} [(\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta) - (\sinh \alpha \cosh \beta - \cosh \alpha \sinh \beta)] = \cosh \alpha \sinh \beta = \text{左边}$$

2. (2.)

解 首先, 我们有

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

如果 $\sin x, \cos x$ 在复数域的展开和上述一致, 那我们就可以根据 3.3 的性质 $\sinh z = -i \sin(iz), \cosh z = \cos(iz)$, 求得双曲正、余弦的展开式为:

$$\begin{aligned}
 \sinh z &= -i \sin(iz) = -i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot i z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \cosh z &= \cos(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

但是, 我们真的能按照上述方法计算吗? 答案是肯定的, 因为 $\sin x, \cos x$ 是解析函数, 其复数域的幂级数展开和实数域的一致, 因此可以直接代换求解。不过, 为了遵循双曲函数的定义, 我们下面给出定义式推导:

$$\begin{aligned}
 \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) \stackrel{k=2m+1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^n 2 \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) \stackrel{k=2m}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^n 2 \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

由上述幂级数展开, 我们可以发现它们的相似之处, $\sinh x$ 的幂级数展开只比 $\sin x$ 少了 $(-1)^n$ 那一项, $\cosh x$ 幂级数也是比 $\cos x$ 少了 $(-1)^n$ 那一项。

注 事实上, 绝对收敛的无穷级数可以直接相加减, 无需取极限“过渡”。

3. (3.)

解 首先推导三角函数的三倍角公式:

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(x+2x) = \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x = \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\sin x \cos^2 x \\
&= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1-\sin^2 x) \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

然后推导双曲正、余弦函数的三倍角公式:

事实上, 我们有:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

因此:

$$\begin{aligned}
\sinh(3x) &= \frac{1}{2} (e^{3x} - e^{-3x}) = \frac{1}{2} [(e^x)^3 - (e^{-x})^3] \\
&= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})(e^{2x} + 1 + e^{-2x}) \\
&= (\sinh x)[(2\sinh x)^2 + 3] \\
&= \boxed{4\sinh^3 x + 3\sinh x}
\end{aligned}$$

同理, 有:

$$\begin{aligned}
\cosh(3x) &= \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-3x}) = \frac{1}{2} [(e^x)^3 + (e^{-x})^3] \\
&= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})(e^{2x} - 1 + e^{-2x}) \\
&= (\cosh x)[(2\cosh x)^2 - 3] \\
&= \boxed{4\cosh^3 x - 3\cosh x}
\end{aligned}$$

正由于它们在各个方面都有如此惊人的相似之处, 因此它们也有相似的性质。

注 本题及上题灵感来源于知乎 @王希 的文章: [可能是最好的讲解双曲函数的文章](#)。

4. (4.)

解 令 $x = \tanh t$, $dx = (1 - \tanh^2 t)dt = \operatorname{sech}^2 t dt$, $t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ ($|x| < 1$), 则:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1-x^2)^2} dx &= \int \cosh^2 t dt = \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt \\
&= \frac{e^{2t} - e^{-2t} + 4t}{8} + C \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} + 4 \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right] + C
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C \right]$$

注 本题由 Deepseek 提供.

 **笔记** 进行变量替换时, 一定要注意定义域。比如 $\operatorname{arctanh} x$ 的定义域为 $|x| < 1$, 故本题可使用其进行替换; 但若 $|x| > 1$, 则需使用 $\operatorname{arccoth} x$ 进行替换.

5. (5.)

解 详细推导步骤见知乎 @Shadow: [悬链线方程简易推导](#).

我们下面来解微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = C_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ 的通解:

令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则有 $\frac{dp}{dx} = C_0 \sqrt{1 + p^2}$. 因此:

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} dp = C_0 dx \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} dp = C_0 x + C$$

假设我们不知道双曲函数, 按照正常的积分方法计算, 即令 $p = \tan t$, $dp = \sec^2 t dt$. 因此:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} dp = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C' = \ln |p + \sqrt{p^2 + 1}| + C'$$

因此

$$\ln |p + \sqrt{p^2 + 1}| = C_0 x + C \Rightarrow p + \sqrt{p^2 + 1} = C'' e^{C_0 x}$$

注意到 $\frac{dy}{d(-x)} = -\frac{dy}{dx} = -p$, 因此

$$\begin{aligned} p + \sqrt{p^2 + 1} &= C'' e^{C_0 x} \\ -p + \sqrt{p^2 + 1} &= C'' e^{-C_0 x} \end{aligned}$$

解得 $p = C'' \cdot \frac{e^{C_0 x} - e^{-C_0 x}}{2}$, 因此可得

$$y = C \cdot \frac{e^{C_0 x} + e^{-C_0 x}}{2} = C \cosh(C_0 x)$$

即证明了悬链线确实为双曲余弦函数。 ■

Bibliography

- [1] 张志林, 黄忠, 李建江.《数学分析》(第五版, 上册) [M]. 华东师范大学出版社, 2019.
- [2] 陈纪修, 於崇华, 金路.《数学分析》(第三版, 上册) [M]. 高等教育出版社, 2019.
- [3] 周民强.《数学分析》(第一版, 第一册) [M]. 科学出版社, 2014.
- [4] DeepSeek, DeepSeek-V3.1, 深度求索 (DeepSeek) , 2024.12-2025.
- [5] Qwen, Qwen3-Max-Preview, 阿里巴巴通义实验室 (Tongyi Lab, Alibaba Group) , 2025.09.
- [6] 王希. 可能是最好的讲解双曲函数的文章 [EB/OL]. (2018-11-05) [2025-09-17]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/20042215>.
- [7] Shadow. 悬链线方程简易推导 [EB/OL]. (2023-04-04) [2025-09-18]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/618983226>.
- [8] 百度百科. 悬链线 [EB/OL].[2025-09-18]. <https://baike.baidu.com/item/%E6%82%AC%E9%93%BE%E7%BA%BF/834767>.
- [9] 一派胡言. 悬链线方程——数学史上的难题之一, 伽利略没能求出, 难在哪里? [EB/OL]. (2021-06-06) [2025-09-18]. https://www.zhihu.com/tardis/zm/art/378408298?source_id=1005.