极限 50 题解答

作者：卢鹏博
(汕头大学)

2024 年 12 月 5 日

目录

1　极限 50 题 (旧)

1.1　1-10 题

1.1.1　第 1 题

题目 1.　求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan x}^{p\text{ 次}}-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{p\text{ 次}}}{\tan x-\sin x}$$

解:　只需重复嵌套泰勒公式即可。

由于

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

因此

$$\tan\tan x=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+o(x^3)=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin\sin x=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)=x-\frac{2}{6}x^3+o(x^3)$$

以此类推，

$$\overbrace{\tan\tan\cdots\tan x}^{p\text{ 次}}=x+\frac{p}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{p\text{ 次}}=x-\frac{p}{6}x^3+o(x^3)$$

因此：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan x}^{p\text{ 次}}-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{p\text{ 次}}}{\tan x-\sin x}\\&=\frac{\frac{p}{3}x^3-\frac{p}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\\&=\boxed{p}\end{aligned}$$

1.1.2 第 2 题

题目 2. 求：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(a+x)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$$

解： 法一：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[(a+x)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{x+a}}\left[e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(a+x)-\left(1+\frac{1}{x+a}\right)\ln x}-1\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x+a}}\cdot x\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(a+x)-\left(1+\frac{1}{x+a}\right)\ln x\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\ln(a+x)-(x+1)\ln x+\frac{\ln x}{x+a}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\frac{a}{x}\\
&=\boxed{a}
\end{aligned}$$

法二：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[(a+x)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[(a+x)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x}}\right]-\lim_{x\to+\infty}\left[x^{1+\frac{1}{x+a}}-x^{1+\frac{1}{x}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{x}}\left[e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}-1\right]-\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{x}}\left[e^{\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}\right)\ln x}-1\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]-\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}\right)\ln x\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[(1+x)\frac{a}{x}\right]-\lim_{x\to+\infty}\left[\left(-\frac{a}{x+a}\right)\ln x\right]\\
&=\boxed{a}
\end{aligned}$$

1.1.3 第 3 题

题目 3. 求：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-x^3\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-x^3\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]\\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2-\tan t\right)e^t-1+1-\sqrt{1+t^6}}{t^3}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2-\tan t\right)e^t-1}{t^3}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+t^6}-1}{t^3}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2-\left(t+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)\right)\right)e^t-1}{t^3}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}t^6}{t^3}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2-t\right)e^t-1}{t^3}-\frac{1}{3}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t^2-t+t-1\right)e^t}{3t^2}-\frac{1}{3}\\
&=\boxed{-\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

1.1.4 第 4 题

题目 4. 求：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$$

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[-\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[4\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}+\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\ln\left(\frac{e^x}{x+e^x}\right)\right]\\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[4]{t^4+t^3+t^2+t+1}-\sqrt[3]{t^3+t^2+t+1}}{t}+\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\ln\left(1-\frac{x}{x+e^x}\right)\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t}{4}+1-\left(\frac{t}{3}+1\right)+o\left(t\right)}{t}
\end{aligned}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{12}}$$

1.1.5 第 5 题

题目 5. 求：

$$\lim_{x\to+\infty}[x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{\pi}{4}\cdot x]$$

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}[x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{\pi}{4}\cdot x]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x[e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}-\frac{\pi}{4}]\\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0}\frac{e^t\cdot\arctan\frac{1+t-t^2}{(t+1)(2t+1)}-\frac{\pi}{4}}{t}\\
&=\lim_{t\to0}e^t\left[\arctan\frac{1+t-t^2}{(t+1)(2t+1)}+\frac{\frac{(1-2t)(t+1)(2t+1)-(4t+3)\left(1+t-t^2\right)}{(1+t)^2(2t+1)^2}}{1+\left[\frac{1+t-t^2}{(t+1)(2t+1)}\right]^2}\right]\\
&=\boxed{\frac{\pi}{4}-1}
\end{aligned}$$

题目 5 的注记. 也可使用

$$\arctan A\pm\arctan B=\arctan\frac{A\pm B}{1\mp AB}$$

1.1.6 第 6 题

题目 6. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$$

解:

法一：

我们先粗略估计一下。由于 $k\le m$，因此 $\sin\frac{k\pi}{n^2}\approx\frac{k\pi}{n^2}$ 那么

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}\approx\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}=\pi\int_0^1(1+x)xdx=\frac{5}{6}\pi$$

但是如果直接使用带有 Peano 余项的 Taylor 公式，会出现一个问题，即余项为无穷个无穷小累加并不一定是无穷小。这是因为 Peano 余项的精度不够，因此考虑使用带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta x)(0<\theta<1)$$

因此

$$\sin\frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} - \frac{\pi^3}{6}\frac{k^3}{n^6}\cos(\theta_k x)(0<\theta_k<1)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} - \frac{\pi^3}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{n^6}\cos(\theta_k x)$$

第一部分极限为 $\frac{5}{6}\pi$, 下面考虑第二部分：

$$\begin{aligned}0 &\le \left|\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{n^6}\cos(\theta_k x)\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{n^6} \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{n^3} \to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} = \boxed{\frac{5}{6}\pi}$$

法二：

我们只需要证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$$

即可，即 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}\right| < M\varepsilon(M>0)$$

由于

$$\sin\frac{k\pi}{n^2}\sim\frac{k\pi}{n^2}$$

因此 $\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $0<\frac{k\pi}{n^2}<\delta$ 时，有

$$\left|\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right| < \frac{k\pi}{n^2}\varepsilon$$

记 $N = \sqrt{\frac{k\pi}{\delta}}$ 因此

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}\right| \\
&=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right)\right| \\
&=\left|\sum_{k=1}^{N}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right)\right|+\left|\sum_{k=N}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right)\right| \\
&\le \varepsilon+\sum_{k=N}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}\varepsilon \\
&\le M\varepsilon
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\boxed{\frac{5}{6}\pi}$$

1.1.7 第 7 题

题目 7. 求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arctan x-(x^2+1)\arctan^3 x}$$

解:

首先观察分母，$(x^2+1)\arctan^3 x$ 是 $3\pi\arctan x$ 的高阶无穷小。

下面证明

$$3\pi\arctan x-\left(x^2+1\right)\arctan^3 x\sim 3\pi\arctan x\sim 3\pi x((x\to 0))$$

事实上

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\pi\arctan x-(x^2+1)\arctan^3 x}{3\pi\arctan x}=1$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arctan x-(x^2+1)\arctan^3 x} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+kx}{1-kx}\right)}-1}{3\pi\arctan x} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+kx}{1-kx}\right)-1}{3\pi x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1-kx}{1+kx} \cdot \frac{k(1-kx)+k(1+kx)}{(1-kx)^2}}{3\pi} \\
&= \frac{1}{3\pi} \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-k^2x^2} \\
&= \boxed{\frac{n}{3\pi}}
\end{aligned}
$$

1.1.8 第 8 题

题目 8. 求：

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{x^2}
$$

解:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{x} (\cos kx)^{\frac{1}{k}-1}}{2x} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} (\cos kx)^{\frac{1}{k}-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

1.1.9 第 9 题

题目 9. 求：

$$
\lim_{x\to 0^+} \left[\ln(x\ln a)\cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right)\right]
$$

解:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \left[\ln(x\ln a)\cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right)\right] \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left[\ln(x\ln a)\cdot \ln\left(\frac{\ln \frac{x}{a} + 2\ln a}{\ln \frac{x}{a}}\right)\right] \\
&= \lim_{x\to 0^+} \ln(x\ln a)\cdot \frac{2\ln a}{\ln \frac{x}{a}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\ln a \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x\ln a}\cdot \ln a}{\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a}} \\
&= 2\ln a
\end{aligned}
$$

1.1.10 第 10 题

题目 10.

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2e\pi\cdot n!)$$

解: 解：考虑 e^x 的麦克劳林公式，带入 $x=1$ 得 e 的级数定义：

考虑

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!+2\pi(2+n+\cdots+n!)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sin\left\{2\pi\left[\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]n!\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \boxed{2\pi}
\end{aligned}
$$

1.2 11-20 题

1.2.1 第 11 题

题目 11.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[n\sin\left(2e\pi\cdot n!\right)-2\pi\right]$$

解: 解：这是第 10 题的加边问题，处理方法和第 10 题类似，依旧考虑 e 的级数定义。

考虑

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\left[n\sin\left(2\pi e n!\right)-2\pi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left[n\sin\left(2\pi\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!\right)-2\pi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left\{n\sin\left[2\pi\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!+2\pi\left(2+n+\cdots+n!\right)\right]-2\pi\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left\{n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-2\pi\right\}
\end{aligned}$$

由于

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\
&=\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{8\pi^3}{(n+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\left\{n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-2\pi\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{2\pi n}{n+1}+\frac{2\pi n}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi n}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{n}{6}\cdot\frac{8\pi^3}{(n+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-2\pi\right]\\
&=2\pi-\frac{4}{3}\pi^3+2\pi\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}-1\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi - \frac{4}{3}\pi^3 - 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \boxed{-2\pi - \frac{4}{3}\pi^3}
\end{aligned}
$$

1.2.2 第 12 题

题目 12. 设数列 a_n 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n \geq 1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n! a_n$

解: 解：由于

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$$

那么

$$\frac{1}{a_{n+1}} = (n+1) + \frac{n+1}{a_n}$$

令 $b_n = n! a_n$，那么 $b_1 = 1$ 则：

$$\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n!}$$

那么

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n! a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{\frac{1}{e}}$$

1.2.3 第 13 题

题目 13. 求：

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right)$$

解: 首先，我们证明：

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} (n \to \infty)$$

事实上

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln x dx = \frac{1}{e}}$$

因此

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} (n \to \infty)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(e^{\frac{\ln(n+1)!}{n+1}-\frac{\ln n!}{n}}-1\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}\cdot\left[\frac{\ln(n+1)!}{n+1}-\frac{\ln n!}{n}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{n\ln(n+1)-\ln n!}{n+1}\\
&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+2)-(n+1)\ln(n+1)}{1}\\
&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

1.2.4 第 14 题

题目 14. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$$

解: 由于：

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)\\
&=\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)\\
&=\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n(n+\sqrt{k})}
\end{aligned}$$

且：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}(n+\sqrt{n})}\leq\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n(n+\sqrt{k})}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}$$

下面考虑 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ 事实上，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}(n\to\infty)$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}(n+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}=\frac{2}{3}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{3}$$

1.2.5 第 15 题

题目 15. $A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$

解: 经典的加边题目，我们证明一个更一般的结论：

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续，求证:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)dx\right]=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$$

证明：将 $f(x)$ 在

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

处用带有拉格朗日余项的泰勒公式展开，则存在

$$\xi_k\in\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}\right)\quad (k=1,2\cdots n)$$

使得

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

由于

$$(b-a)\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})=\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x_k)dx$$

$$n\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)dx$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续，那么

$$\exists M=max|f''([a,b])|$$

且有

$$\left|(b-a)\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})-n\int_a^b f(x)dx+\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f'(x_k)(x-x_k)dx\right|$$

$$
\begin{aligned}
&=\left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}[f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)-f(x)]dx\right| \\
&=\left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2dx\right| \\
&\le \frac{M}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}(x-x_k)^2dx\right| \\
&=\frac{M}{6}\left|\sum_{k=1}^{n} n(x-x_k)^3\Big|_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\right| \\
&=\frac{M(b-a)^3}{6n}\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[(b-a)\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})-n\int_a^b f(x)dx\right] \\
&=-\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f'(x_k)(x-x_k)dx\right] \\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} nf'(x_k)(x-x_k)^2\Big|_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^2}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(a+k\frac{b-a}{n}) \\
&=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx \\
&=\boxed{\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]}
\end{aligned}
$$

注：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $p+1$ 阶导函数，则此题还可以推广到如下形式：

$$
\lim_{n\to\infty} n^p\left\{\left[\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot\frac{(b-a)^{k+1}}{k!\cdot(k+1)n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(x_i)\right]-\int_a^b f(x)dx\right\}=\frac{(-1)^{p+1}(b-a)^p}{(p+1)!}\left[f^{(p-1)}(b)-f^{(p-1)}(a)\right]
$$

其中 $x_i=a+i\frac{b-a}{n}(i=1,2\cdots n)$

由于证明过程较为繁琐,此处不再叙述。具体证明过程详见https://zhuanlan.zhihu.com/p/931322500。

对于此题，令

$$
f(x)=\frac{1}{1+x^2}, a=0, b=1
$$

则

$$
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{0-1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\boxed{\frac{1}{4}}
$$

1.2.6 第 16 题

题目 16. 求:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2}$$

解: 使用 Stolz 公式，有：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{(n+1)^2 - n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} - \ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) = \ln(n+1)!$$

因此：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

1.2.7 第 17 题

题目 17. 求:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}$$

下面计算指数的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

仿照第 6 题的做法，我们将 $\ln(1+x)$ 使用带有 Lagrange 余项的麦克劳林公式展开：

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2(1+\theta x)^2}x^2(0<\theta<1)$$

那么

$$\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4(1+\theta_k x)^2}(0<\theta_k<1)$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4(1+\theta_k x)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4(1+\theta_k x)^2}$$

对于第一项，极限为 $\frac{1}{2}$，对于第二项：

$$0\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4(1+\theta_k x)^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}\to 0(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\boxed{\sqrt{e}}$$

1.2.8 第 18 题

题目 18. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{an}+2^{an}+\cdots+n^{an}}{n^{an}}$$

解: 当 $a\leq 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{an}+2^{an}+\cdots+n^{an}}{n^{an}}=+\infty$$

当 $a > 0$ 时：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1^{an}+2^{an}+\cdots+n^{an}}{n^{an}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{an} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{an} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{an} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{an} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{an\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

一方面，由于

$$
\ln\left(1-\frac{k}{n}\right) \le -\frac{k}{n}
$$

故

$$
\sum_{k=0}^{n-1} e^{an\ln(1-\frac{k}{n})} \le \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ak} = \frac{1-\frac{1}{e^{an}}}{1-\frac{1}{e^{a}}} \to \frac{e^a}{e^a-1}(n\to\infty)
$$

另一方面, 总存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{an} \ge \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{an} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{an} \\
&= \sum_{k=0}^{N} e^{-ak} \\
&= \frac{e^a-\frac{1}{e^{aN}}}{e^a-1} \to \frac{e^a}{e^a-1}(N\to\infty)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1^{an}+2^{an}+\cdots+n^{an}}{n^{an}} = \begin{cases} +\infty, & \text{if } a \le 0 \\ \frac{e^a}{e^a-1}, & \text{if } a > 0 \end{cases}
$$

1.2.9 第 19 题

题目 19. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$$

解： 本题可以使用夹逼准则，也可以使用极限的定义加放缩法做出来。

法一：

一方面

$$\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}\geq\frac{2n-1}{n}\to 2(n\to\infty)$$

另一方面，对于任意 $2\leq k\leq n$，有

$$n^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{n}=\sqrt[k]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdots 1}\leq\frac{2\sqrt{n}+k-2}{k}$$

因此：

$$\begin{aligned}&\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}\\&\leq 1+\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{2\sqrt{n}+k-2}{k}}{n}\\&=1+\frac{(2\sqrt{n}-2)\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+n-1}{n}\\&=2+2\frac{(\sqrt{n}-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}-\frac{1}{n}-2\frac{\sqrt{n}-1}{n}\end{aligned}$$

事实上，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-1)(\ln n+\gamma+o(1))}{n}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}=\boxed{2}$$

法二：只需证明

$$\left|\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}-2\right|<\varepsilon$$

即可。

记 $m=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$ 因此

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}-2\right| \\
=&\left|\frac{\sum_{k=2}^{n}\left(n^{\frac{1}{k}}-1\right)}{n}-\frac{1}{n}\right| \\
\leq&\frac{\sum_{k=2}^{n}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}+\frac{1}{n} \\
=&\frac{\sum_{k=2}^{m}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}+\frac{\sum_{k=m+1}^{n}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

对于第一项:

$$0\leq\frac{\sum_{k=2}^{m}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}\leq\frac{|\sqrt{n}-1|+|\sqrt[3]{n}-1|\sqrt{n}}{n}\to 0(n\to\infty)$$

对于第二项: 由于 $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{k(n)}}=1$ $(\sqrt{n}<k\leq n)$. 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{k(n)}}=e^{\frac{\ln n}{k(n)}}\to 1(n\to\infty)$$

因此：$\forall\varepsilon>0,\exists N>m+1$ 当 $n>N$ 时，有

$$\left|n^{\frac{1}{k(n)}}-1\right|<\varepsilon$$

因此：

$$\frac{\sum_{k=m+1}^{n}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}=\frac{\sum_{k=m+1}^{N}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}+\frac{\sum_{k=N+1}^{n}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}$$

第一部分

$$0\leq\frac{\sum_{k=m+1}^{N}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}\leq\frac{|N-m|\left(n^{1/m}-1\right)}{n}\leq\frac{|N-m|\left(n^{1/2}-1\right)}{n}\to 0(n\to\infty)$$

第二部分

$$0\leq\frac{\sum_{k=N+1}^{n}\left|n^{\frac{1}{k}}-1\right|}{n}\leq\frac{(N-n)\varepsilon}{n}\to\varepsilon(n\to\infty)$$

因此

$$\left|\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}-2\right|<3\varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}=\boxed{2}$$

1.2.10 第 20 题

题目 20.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)$$

其中 p 为自然数。

解： 又是经典的加边问题，参考第 15 题, 令

$$f(x)=x^p, a=0, b=1$$

立马得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1-0}{2}(1-0)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

1.3 21-30 题

1.3.1 第 21 题

题目 21. $-1 < x_0 < 1, x_n = \sqrt{\frac{1+x_{n-1}}{2}} (n = 1, 2, 3 \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k$

解: 由于 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$，故可令 $x_0 = \cos\theta$, 那么 $x_1 = \cos\frac{\theta}{2}$，归纳可得 $x_n = \cos\frac{\theta}{2^n}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} x_k &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\theta}{2^n} \cos\frac{\theta}{2^n} \cos\frac{\theta}{2^{n-1}} \cdots \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{|\arccos x_0|}}
\end{aligned}
$$

1.3.2 第 22 题

题目 22. 求：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{nC_n^k}$$

解: 解：首先

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} C_n^k$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{nC_n^k} = \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^k}$$

而

$$0 \le \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^k} \le \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} \le \frac{6}{n(n-1)} \to 0 (n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{nC_n^k} = \boxed{0}$$

1.3.3 第 23 题

题目 23. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]dx_1dx_2\cdots dx_n$$

解：记

$$I=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]dx_1dx_2\cdots dx_n$$

令 $y_i=1-x_i,dx_i=-dy_i$ 因此

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}[n-(y_1+y_2+\cdots+y_n)]\right]dy_1dy_2\cdots dy_n\\
&=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin^2\left[\frac{\pi}{2n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]dy_1dy_2\cdots dy_n\\
&=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\left[\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]+\sin^2\left[\frac{\pi}{2n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]\right]dy_1dy_2\cdots dy_n\right\}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]dx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{1}{2}$$

1.3.4 第 24 题

题目 24. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

解： 法一：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}e^{1-\frac{1}{k}-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}e^{\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{1}{k}-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]}\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{1}{k}-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]}
\end{aligned}$$

考虑

$$
\begin{aligned}
H_n &= \ln n + \gamma + o(1) \\
\ln n! &= \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + o(1)
\end{aligned}
$$

记

$$
\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln n + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k} - k\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln n + \left(n + \frac{1}{k+1}\right) - \gamma_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\ln(k+1) - k\ln k] + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln n + n - \gamma_{n+1} - (n+1)\ln(n+1) + \ln n!\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln n + n - \gamma - (n+1)\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + o(1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\ln n - n\ln(n+1) - \gamma + \ln\sqrt{2\pi}\right] \\
&= -\gamma + \ln\sqrt{2\pi} + \lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \ln\sqrt{2\pi} - \gamma - 1
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\gamma+1}}}
$$

法二：由 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n (n \to \infty)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \frac{e^n \cdot e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{1}\right)^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} e^n \frac{e^{\left(\ln - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{\frac{2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdots(n+1)^n}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n}} \\
&= e^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot e^n \cdot \frac{n!}{(n+1)^n} \\
&= e^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot e^n \cdot \frac{\sqrt{2n\pi}\cdot\frac{n^n}{e^n}}{(n+1)^n} \\
&= \sqrt{2\pi} e^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\gamma+1}}}
\end{aligned}$$

1.3.5 第 25 题

题目 25. $f(x)$ 在 x_0 处可导, $a_n < x_0 < b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

解: 法一：

考虑泰勒展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

因此

$$f(a_n) = f(x_0) + f'(x_0)(a_n - x_0) + o(a_n - x_0)$$

$$f(b_n) = f(x_0) + f'(x_0)(b_n - x_0) + o(b_n - x_0)$$

我们下面证明 $o(a_n - x_0) = o(a_n - b_n)$

事实上，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(a_n - x_0)}{a_n - x_0} \cdot \frac{a_n - x_0}{a_n - b_n}$$

由于 $a_n - x_0 a_n - b_n = 0 < x_0 - a_n b_n - a_n < 1$ 因此上述极限为 0，也即 $o(a_n - x_0) = o(a_n - b_n)$ 同理，

$o(b_n - x_0) = o(b_n - a_n)$ 那么

$$f(b_n) - f(a_n) = f'(b_n - a_n) + o(b_n - a_n)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(b_n - a_n) + o(b_n - a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

法二：注意到：

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} + \left(\frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} - \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}\right)\frac{a_n - x_0}{b_n - a_n}$$

其中第一项极限为 $f'(x_0)$，第二项为无穷小乘有界量，极限为 0，原问题得证。

1.3.6 第 26 题

题目 26.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}\right) - \frac{n}{3}\right]$$

解: 这也是一道经典题目，我们下面证明一个更一般的结论：

对于 $\forall m \geq 2$ 且 $m \in N$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m + i\cdot n^{m-2}} - \frac{n}{m+1}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}$$

证明：在正式证明之前，我们需要先知道

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m} = \frac{n}{m+1} + \frac{1}{2} + o(1)(n\to\infty)$$

下面我们证明这个结论：易知 $\sum_{i=1}^{n} i^m = a_{m+1}n^{m+1} + a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0$ 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m} = a_{m+1}n + a_m + o(1)(n\to\infty)$$

因此

$$a_{m+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

那么

$$a_m = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m} - \frac{n}{m+1}\right)$$

根据第 20 题的结论可知

$$a_m = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m} - \int_0^1 x^m dx\right) = \frac{1}{2}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m} = \frac{n}{m+1} + \frac{1}{2} + o(1)(n\to\infty)$$

下面使用两种方法证明本题：

(法一)Abel 变换:

记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^m$ 使用 Abel 变换, 得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m + i\cdot n^{m-2}} \\
&= \frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n^m + (i+1)n^{m-2}} - \frac{1}{n^m + i\cdot n^{m-2}}\right)S_i \\
&= \frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+i+1)(n^2+i)}
\end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m + i\cdot n^{m-2}} - \frac{n}{m+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} - \frac{n}{m+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+i+1)(n^2+i)}\right)
\end{aligned}$$

对于第一项:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} - \frac{n}{m+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^m}\cdot\frac{n}{n+1} - \frac{n}{m+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{m+1} + \frac{1}{2} + o(1)\right)\frac{n}{n+1} - \frac{n}{m+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} - \frac{n}{(n+1)(m+1)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

对于第二项, 先考虑

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+0)(n^2+0)}\right)$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{n^4}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}j^m}{n^m}\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(\frac{j}{n})^m-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(\frac{j}{n})^m\\
&=\int_0^1 dx\int_0^x y^m dy\\
&=\frac{1}{(m+1)(m+2)}\\
&=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式 $\sum a_nb_n\le\sqrt{(\sum a_n^2)(\sum b_n^2)}(a_n,b_n>0)$, 以及 $\sum a_n^2\le(\sum a_n)^2(a_n>0)$ 因此

$$\sum a_nb_n\le\sum a_n\cdot\sqrt{(\sum b_n^2)}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+i+1)(n^2+i)}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{n^4}\right|\\
&=\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\frac{2n^2i+n^2+i^2+i}{(n^2+i)(n^2+i+1)}\right|\\
&\le\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\left|\left[\frac{2n^2i+n^2+i^2+i}{(n^2+i)(n^2+i+1)}\right]^2\right|}\\
&\le\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{Mn^3}{n^4}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\le\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\left(\frac{M^2}{n}\right)}$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\frac{M}{\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+i+1)(n^2+i)}\right)=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{n}{m+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}$$

证毕。

(法二) 拟合法

考虑

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m}=\frac{n}{m+1}+\frac{1}{2}+o(1)(n\to\infty)$$

因此

$$\frac{n}{m+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m}-\frac{1}{2}+o(1)$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{n}{m+1}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m}+\frac{1}{2}+o(1)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{i^m}{n^m}\right)+\frac{1}{2}+o(1)\\&=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+i\cdot n^{m-2})}+o(1)\end{aligned}$$

考虑

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+n^{m-1})}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+i\cdot n^{m-2})}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^{m+2}}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^{m+2}}=\int_0^1 x^{m+1}dx=\frac{1}{m+2}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+n^{m-1})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^{m+2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=\frac{1}{m+2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+i\cdot n^{m-2})}=\frac{1}{m+2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{n}{m+1}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}$$

证毕。

由此，令 $m=2$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}\right)-\frac{n}{3}\right]=\boxed{\frac{1}{4}}$$

1.3.7 第 27 题

题目 27.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}$$

解: 首先，由第 18 题的结论，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}=\frac{e}{e-1}$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{n^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}\\&=\frac{e-1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{n^n}\\&=\frac{e-1}{e}\left[1+\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^{n-1}}{n^n}\right]\end{aligned}$$

又因为

$$0\le\left|\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^{n-1}}{n^n}\right|\le\frac{(n-2)n^{n-2}+n^{n-1}}{n^n}\to0(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}=\boxed{\frac{e-1}{e}}$$

1.3.8 第 28 题

题目 28.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$$

解： 解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx+\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\tan^n x+1}dx+\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\cot^n x}dx\\
&=I_1+I_2
\end{aligned}$$

对于 I_1, 使用控制收敛定理, 得

$$I_1=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\tan^n x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n x}{\tan^n x+1}dx=0$$

对于 I_2, 使用控制收敛定理, 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\cot^n x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\cot^n x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dx=\frac{\pi}{12}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\boxed{\frac{\pi}{12}}$$

1.3.9 第 29 题

题目 29.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

解： 法一：使用控制收敛定理, 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}\sin^n x dx=\boxed{0}$$

法二 (分段估计)：

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

对于第一项：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx \le \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \to 0 (n \to \infty)$$

对于第二项：

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \le \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1^n dx = \varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \boxed{0}$$

1.3.10 第 30 题

题目 30.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}$$

解： 首先，

$$\int \frac{1}{\sqrt{n^2+n-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{n^2+n}} + C$$

一方面

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} dx \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-x^2}} dx = \int_0^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n-x^2}} dx
\end{aligned}$$

另方面

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} dx + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-x^2}} dx + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&= \int_0^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n-x^2}} dx + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n-x^2}}dx = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\pi}{2}$$

由夹逼准则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

1.4 31-40 题

1.4.1 第 31 题

题目 31.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}$$

同第 30 题一样，首先

$$\int\frac{n}{n^2+x^2}dx=\arctan\frac{x}{n}+C$$

一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}&=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+k^2}dx\\ &\geq\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{n}{n^2+x^2}dx=\int_0^{n^2}\frac{n}{n^2+x^2}dxdx\end{aligned}$$

另方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}&=\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+k^2}dx+\frac{1}{2n}\\ &\leq\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_{k}^{k+1}\frac{n}{n^2+x^2}dx+\frac{1}{2n}\\ &=\int_0^{n^2}\frac{n}{n^2+x^2}dx+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^2}\frac{n}{n^2+x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$$

由夹逼准则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

1.4.2 第 32 题

题目 32. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2i-1}{n^2}a$$

解: 这也是一道典型的拟合法题目，我们下面证明一个更一般的结论：

若 $f(x)\sim x(x\to 0), x_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)$, 则:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证明：事实上，如果 $f(x)=x$, 那么

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a=a$$

因此我们用 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a$ 替换 a 进行拟合。

那么我们只需要证明 $|x_n-a|<\varepsilon$ 即可，即

$$\begin{aligned}
&|x_n-a|\\
=&\left|\sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i-1}{n^2}a)-\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a\right|\\
\le&\sum_{i=1}^{n}\left|f(\frac{2i-1}{n^2}a)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|\\
<&\varepsilon
\end{aligned}$$

即可。而

$$\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}\varepsilon$$

因此我们只需

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\frac{2i-1}{n^2}\varepsilon$$

即可。事实上，由于 $f(x)\sim x(x\to 0)$, 那么 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, n>N$ 时，取较小的 δ，使得 $0<\left|x-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\delta$，那么就有

$$\left|\frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a}-1\right|<\frac{\varepsilon}{a}$$

因此

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\frac{2i-1}{n^2}\varepsilon$$

证毕.

对于本题，可自然得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2i-1}{n^2}a=\boxed{a}$$

题目 32 的注记. 由于 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)(x\to 0)$，因此将 x 换成其它函数也成立。

1.4.3 第 33 题

题目 33.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}+\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$$

解: 由于

$$n^k\leq n^k+1\leq(n+1)^k$$

因此

$$\frac{1}{n}\geq\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}\geq\frac{1}{n+1}$$

那么

$$\frac{n}{n}\geq\sum_{k=1}^{n}\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}\geq\frac{n}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}=1$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}=1$$

因此

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}+\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}\right]=\boxed{2}$$

1.4.4 第 34 题

题目 34. 设 $\alpha_k=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$，求

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{{\alpha_k}^n+\alpha_k}\right)$$

解: 首先子 α_k 是 $x^2-kx-1=0$ 的一个解，因此 $\alpha_k^2-k\cdot\alpha_k-1=0$ 那么

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{\alpha_k^n+\alpha_k}\right)\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{k\cdot\alpha_k}{\alpha_k^{n+1}+\alpha_k^2}\right)\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^{n+1}+1}{\alpha_k^{n+1}+\alpha_k^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\prod_{p=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k^2}\cdot\frac{\alpha_k^{p+1}+1}{\alpha_k^{p-1}+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_k^{2n}}\cdot\frac{(\alpha_k^{n+1}+1)(\alpha_k^n+1)}{2(\alpha_k+1)}\\
&=\frac{\alpha_k}{2(\alpha_k+1)}
\end{aligned}$$

因此：

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{{\alpha_k}^n+\alpha_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}}{2\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}+1\right)}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

1.4.5 第 35 题

题目 35. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(x+\frac{i}{n^2}\right)}{x+\frac{k}{n^2}}dx$$

解: 注意到:

$$\left[\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n^2}\right)\right]'=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(x+\frac{i}{n^2}\right)}{x+\frac{k}{n^2}}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(x+\frac{i}{n^2}\right)}{x+\frac{k}{n^2}}dx\\
&=\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n^2}\right)\Bigg|_0^1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)-\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)\\
&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)-\frac{n!}{n^n\cdot n^n}
\end{aligned}
$$

对于第二项, 由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}\frac{n^n}{e^n}$, 可知

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}\frac{n^n}{e^n}}{n^n\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}}{n^n\cdot e^n}=0
$$

对于第一项，参考第 17 题的结果，知 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\sqrt{e}$

因此

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x+\frac{i}{n^2}\right)}{x+\frac{k}{n^2}}dx=\boxed{\sqrt{e}}
$$

1.4.6 第 36 题

题目 36. 求：

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}
$$

解:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+(n+1)^{2020}\right)-\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n(n+1)^{2020}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n\cdot n^{2020}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}=\int_0^1x^{2020}dx\\
&=\boxed{\frac{1}{2021}}
\end{aligned}
$$

1.4.7 第 37 题

题目 37. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}$$

解： (1). 当 $\alpha \le 0$ 时，有

$$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\frac{1}{n}$$

因此

$$\frac{n}{n+1}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\frac{n}{n}$$

故

$$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\frac{1}{n}=1$$

(2). 当 $0<\alpha<1$ 时，有

$$\frac{1}{n+n^{\alpha}}\le\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\frac{1}{n}$$

因此

$$\frac{n}{n+n^{\alpha}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\frac{n}{n}$$

故

$$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\frac{1}{n}=1$$

(3). 当 $\alpha=1$ 时，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\&=\ln 2\end{aligned}$$

(4). 当 $\alpha>1$ 时，有

$$0\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{n}k^{\alpha/2}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha/2}}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha/2}}}{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)^{\alpha/2}}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}=\begin{cases}1 & ,\alpha<1\\ \ln 2 & ,\alpha=1\\ 0 & ,\alpha>1\end{cases}$$

1.4.8 第 38 题

题目 38. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

解: 由于 $0<\ln n<n$, 因此 $\sin\frac{\ln k}{k}>0(k=2,3,\cdot n)$ 那么

$$\begin{aligned}&\left(\sin\frac{\ln 2}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\&\le\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\&\le(1+1+\cdots+1)^{\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{n}\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\ln 2}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\boxed{1}$$

1.4.9 第 39 题

题目 39. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}$$

解:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}{(\frac{i}{n})^2+(\frac{j}{n})^2}\\
&=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy
\end{aligned}
$$

使用极坐标代换，令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\rho d\rho\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}(\sin\theta+\cos\theta)d\rho\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta}d\theta\\
&=2(1-\ln|\cos x|)|_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=\boxed{\frac{\pi}{2}+\ln 2}
\end{aligned}
$$

1.4.10 第 40 题

题目 40. 求：

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n}{k}\right\}^2
$$

解:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n}{k}\right\}^2\\
&=\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}^2dx\\
&=\int_1^{+\infty}\frac{\{t\}^2}{t^2}dt\\
&=\int_1^{+\infty}\frac{(t-\lfloor t\rfloor)^2}{t^2}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{t^2} dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left(1 - \frac{2k}{t} + \frac{k^2}{t^2}\right) dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{k+1} - 2k \ln \frac{k+1}{k}\right)
\end{aligned}
$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$, 记 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 又由 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 则

$$
H_n = \ln n + \gamma + o(1)
$$

$$
\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + o(1)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{1}{k+1} - 2k \ln \frac{k+1}{k}\right) \\
&= 2n - (H_{n+1} - 1) - 2\sum_{k=1}^{n}[(k+1)\ln(k+1) - k\ln k] + 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) \\
&= 2n + 1 - H_{n+1} - 2(n+1)\ln(n+1) + 2\ln(n+1)! \\
&= 2n + 1 - (\ln(n+1) + \gamma + o(1)) - 2(n+1)\ln(n+1) \\
&+ 2\left(\ln\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 + o(1)\right) \\
&= -1 - \gamma + \ln(2\pi) + o(1)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n}{k}\right\}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{k+1} - 2k \ln \frac{k+1}{k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{1}{k+1} - 2k \ln \frac{k+1}{k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1 - \gamma + \ln(2\pi) + o(1)) \\
&= \boxed{-1 - \gamma + \ln(2\pi)}
\end{aligned}
$$

1.5 41-51 题

1.5.1 第 41 题

题目 41. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}$$

解： (法一)：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}=\sum_{2\le k\le n-\sqrt[4]{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}+\sum_{n-\sqrt[4]{n}\le k\le n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}+\frac{1}{n}-\left(\frac{n-\sqrt[4]{n}}{n}\right)^{n-\sqrt[4]{n}}$$

对于第一部分，我们有

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{k}<\frac{M}{n^{5/4}}\,(2\le k\le n-\sqrt[4]{n})$$

这是因为 $\left(\frac{k}{n}\right)^{k}$ 的最大值仅在端点处取得。

事实上，若令 $f(x)=\left(\frac{x}{n}\right)^{x}\,(1<x<n)$, 那么

$$f'(x)=\left(\frac{x}{n}\right)^{x}\left[\ln\left(\frac{x}{n}\right)+1\right]$$

因此 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{n}{e}\right]$ 单调递减，在 $\left[\frac{n}{e},n\right]$ 单调递增。

因为

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{2}<\frac{4}{n^{5/4}}$$

由此，我们只需

$$\left(\frac{n-\sqrt[4]{n}}{n}\right)^{n-\sqrt[4]{n}}<\frac{M}{n^{5/4}}$$

也即

$$\frac{5}{4}\ln n-\ln M<(n-\sqrt[4]{n})\ln\left(1+\frac{\sqrt[4]{n}}{n-\sqrt[4]{n}}\right)$$

而 $\ln x>1-\frac{1}{x}$

故

$$(n-\sqrt[4]{n})\ln\left(1+\frac{\sqrt[4]{n}}{n-\sqrt[4]{n}}\right)>n^{1/4}-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

只需

$$\ln M>\left(\frac{5}{4}\ln n+\frac{1}{\sqrt{n}}-n^{1/4}\right)_{\max}$$

令 $g(x)=\frac{5}{4}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}-x^{1/4}$, 则

$$g'(x)=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{3/4}}=\frac{1}{4x^{3/2}}\left(5x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}-2\right)$$

令 $h(x)=5x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}-2$ 则 $h'(x)=\frac{1}{4x}\left(10x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{4}}\right)$

令 $h'(x)=0$,则 $x_0=\frac{1000}{81}$, 因此 $h(x)$ 在 $[0,x_0]$ 单调递增,在 $[x_0,+\infty)$ 单调递减,且 $h(x_0)=\frac{446}{27}>0$

且由 $h(0)=-2<0,h(+\infty)=-\infty$ 可知 $h(x)$ 存在两个确定的零点 x_1,x_2,$x_1<x_2$

因此 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递减，在 (x_1,x_2) 单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 单调递减。

记

$$\max_{x_1<x<x_2}e^{g(x)}=M_1$$

因此只需取

$$M=\max\{4,M_1\}$$

那么就有

$$\left(\frac{k}{n}\right)^k<\frac{M}{n^{5/4}}\left(2\le k\le n-\sqrt[4]{n}\right)$$

因此

$$0<\sum_{2\le k\le n-\sqrt[4]{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^k<\frac{M}{n^{1/4}}\to 0(n\to\infty)$$

对于第二部分, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n-\sqrt[4]{n}\le k\le n}\left(\frac{k}{n}\right)^k\\=&\sum_{0\le k\le\sqrt[4]{n}}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}\\=&\sum_{0\le k\le\sqrt[4]{n}}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\end{aligned}$$

由于 $0\le k\le\sqrt[4]{n}$, 因此：

$$\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)=-\frac{k}{n}+O\left(\frac{k^2}{n^2}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}&e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\\&=e^{-k+\frac{k^2}{n}+O(\frac{k^2}{n})}\\&=e^{-k}\cdot e^{\frac{k^2}{n}+O(\frac{k^2}{n})}\\&=e^{-k}\left[1+O\left(\frac{k^2}{n}+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$= e^{-k}\left[1+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right]$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n-\sqrt[4]{n}\le k\le n}\left(\frac{k}{n}\right)^k\\
&=\sum_{0\le k\le \sqrt[4]{n}} e^{-k}\left[1+O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right]\\
&=\frac{e-\frac{1}{e^{\sqrt[4]{n}}}}{e-1}+\sum_{0\le k\le \sqrt[4]{n}} e^{-k}O\left(\frac{k^2}{n}\right)
\end{aligned}$$

由于

$$0<\left|\sum_{0\le k\le \sqrt[4]{n}} e^{-k}O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right|<A\sum_{1\le k\le \sqrt[4]{n}}\frac{k}{n}=\frac{A}{2}\cdot\frac{(\sqrt[4]{n}+1)\sqrt[4]{n}}{n}\to 0(n\to\infty)$$

而后两部分极限为 0

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^k\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{2\le k\le n-\sqrt[4]{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^k+\sum_{n-\sqrt[4]{n}\le k\le n}\left(\frac{k}{n}\right)^k+\frac{1}{n}-\left(\frac{n-\sqrt[4]{n}}{n}\right)^{n-\sqrt[4]{n}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{e-\frac{1}{e^{\sqrt[4]{n}}}}{e-1}\\
&=\boxed{\frac{e}{e-1}}
\end{aligned}$$

(法二)

一方面, 总存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}\geq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}\geq\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}\to\frac{e}{e-1}(N\to\infty)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}&=\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}+\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n-2}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{n}\\&\leq\sum_{0\leq k<\sqrt[4]{n}}e^{-k+\frac{k^2}{n}}+\sum_{\sqrt[4]{n}\leq k\leq n-2}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{n}\\&\leq e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}+\max\left\{\sum_{\sqrt[4]{n}\leq k\leq n-2}e^{-\sqrt[4]{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}},\sum_{\sqrt[4]{n}\leq k\leq n-1}e^{2\ln\left(\frac{2}{n}\right)}\right\}+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

第一部分极限为 $\frac{e}{e-1}$，第三部分极限为 0，下面分别考虑第二部分第一项和第二项：

$$0\leq\left|\sum_{\sqrt[4]{n}\leq k\leq n-2}e^{-\sqrt[4]{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|\leq ne^{-\sqrt[4]{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}\to 0(n\to\infty)$$

$$0\leq\left|\sum_{\sqrt[4]{n}\leq k\leq n-2}e^{2\ln\left(\frac{2}{n}\right)}\right|\leq n\cdot\frac{4}{n^2}\to 0(n\to\infty)$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}=\boxed{\frac{e}{e-1}}$$

1.5.2 第 42 题

题目 42. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha k}\ (\alpha>0)$$

解: 仿照第 41 题可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha k}=\boxed{\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}}$$

1.5.3 第 43 题

题目 43. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{2^{2^k}+1}$$

解: 首先

$$\frac{2^k}{2^{2^k}+1}=\frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{2^{2^k}+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2-1}-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}\right)\\
&=\boxed{1}
\end{aligned}$$

1.5.4 第 44 题

题目 44.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2$$

解: 先考虑括号内的无穷级数：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{n+k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left.\frac{x^{n+k}}{n+k}\right|_0^1\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{n+k-1}dx\\&=\int_0^1 x^n\sum_{k=1}^{\infty}(-x)^{k-1}dx\\&=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right)^2\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right)\left(\int_0^1\frac{y^n}{1+y}dy\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\int_0^1\frac{(xy)^n}{(1+x)(1+y)}dxdy\right)\end{aligned}$$

$$=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)(1-xy)} dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1-xy)} dy
\end{aligned}
$$

记 $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1-xy)} dy$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1-xy+xy}{(1+y)(1-xy)} dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+y} dy + x \int_0^1 \frac{y}{(1+y)(1-xy)} dy \\
&= \ln 2 + x \left(\int_0^1 \frac{1+y-1}{(1+y)(1-xy)} dy \right) \\
&= \ln 2 + x \left(\int_0^1 \frac{1}{1-xy} dy - \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1-xy)} dy \right) \\
&= \ln 2 + x \left(\frac{\ln(1-x)}{-x} - I \right)
\end{aligned}
$$

因此

$$
I = \frac{\ln 2 - \ln(1-x)}{1+x}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1-xy)} dy \\
&= \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1-x)}{(1+x)^2} dx \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2} dx
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2} dx \\
&= \left[-\frac{\ln(1-x)}{x+1} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right] \Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{2(x+1)} \ln(1-x) \\
&= -\frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}
$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2=\frac{\ln 2}{2}-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2}dx=\boxed{\ln 2}$$

1.5.5 第 45 题

题目 45. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)$$

解： 由于

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}-k\pi\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}\right)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)=1$$

因此 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$ 当 $n>k>N$ 时，有

$$\left|\sin^2\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}\right)-1\right|<\varepsilon$$

故

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)-1\right|\\ \le&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{N}C_n^k\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)-\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{N}C_n^k\right|+\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)-\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\right|\end{aligned}$$

第一项求和为有限项，极限为 0。

第二项

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)-\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\right|\\ =&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}\right)-1\right]\right|\\ \le&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\varepsilon\right|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \varepsilon = \varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right) = \boxed{1}$$

1.5.6 第 46 题

题目 46. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}dx}{\ln n}$$

解： 由和差化积公式

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}dx}{\ln n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2[(n+1)x]-\sin^2(nx)}{\sin x}dx}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2nx)-\cos(2n+2)x}{\sin x}dx\\
&=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(2nx+x)\sin x}{\sin x}dx\\
&=\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)xdx\\
&=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2n+1}\\
&=\boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

1.5.7 第 47 题

题目 47. 求：

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}$$

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}\\
&=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x\sqrt{1+\frac{k}{x^2}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{1}{2}\cdot x\frac{k}{x^2}\\
&=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k k}{2x}\\
&=\boxed{0}
\end{aligned}$$

题目 47 的注记. 由于和式是有限项，因此可以逐项等价无穷小以及逐项求极限再求和。

1.5.8 第 48 题

题目 48. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n$$

解:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)=n+1-\gamma_{n+1}-\ln(n+1)$$

其中

$$\gamma_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$$

令

$$a_n=\frac{\gamma_{n+1}+\ln(n+1)-1}{n}$$

那么有:

$$x_n=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-a_n}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
\ln x_n &= -n\ln(1-a_n)-\ln n \\
&= n\left(a_n+\frac{{a_n}^2}{2}+\cdots\right)-\ln n \\
&= n(a_n+\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2)-\ln n \\
&= na_n-\ln n+nO\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2 \\
&= \gamma_{n+1}-1+\ln\frac{n+1}{n}+nO\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n=\boxed{e^{\gamma-1}}
$$

1.5.9 第 49 题

题目 49. 求：

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x\sin nx}{1+n^6x^2}dx
$$

解: 当 $x=0$ 时，$\frac{x\sin nx}{1+n^6x^2}=0$ 当 $x\neq 0$ 时

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x\sin nx}{1+n^6x^2}=0
$$

故由控制收敛定理，得

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x\sin nx}{1+n^6x^2}dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{x\sin nx}{1+n^6x^2}dx=\boxed{0}
$$

1.5.10 第 50 题

题目 50. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)^n$$

解:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}=1+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}$$

而

$$0\le\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}\le\frac{1}{C_n^2}+\frac{1}{C_n^{n-2}}+\frac{n}{C_n^3}=\frac{4}{n(n-1)}+\frac{6}{(n-1)(n-2)}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n(n-1)}+\frac{6}{(n-1)(n-2)}\right)^n=e^2$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)^n=\boxed{e^2}$$

1.5.11 第 51 题

题目 51. 求：

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt[m]{m+1}\cdot\sqrt[m^2+m]{\prod_{k=1}^{m}C_m^k}\right)$$

解： 首先

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{m+1}=\lim_{m\to\infty}e^{\frac{\ln(m+1)}{m}}=1$$

其次

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\sqrt[m^2+m]{\prod_{k=1}^{m}C_m^k}\\&=e^{\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{m}C_m^k\right)}{m^2+m}}\end{aligned}$$

对于指数

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{m}C_m^k\right)}{m^2+m}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}\ln C_m^k}{m^2+m}\cdot\frac{m^2+m}{m^2}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{m}\ln C_m^k}{m^2}\end{aligned}$$

由第 16 题可知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{m}\ln C_m^k}{m^2}=\frac{1}{2}$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt[m]{m+1}\cdot\sqrt[m^2+m]{\prod_{k=1}^{m}C_m^k}\right)=\boxed{e^{\frac{1}{2}}}$$