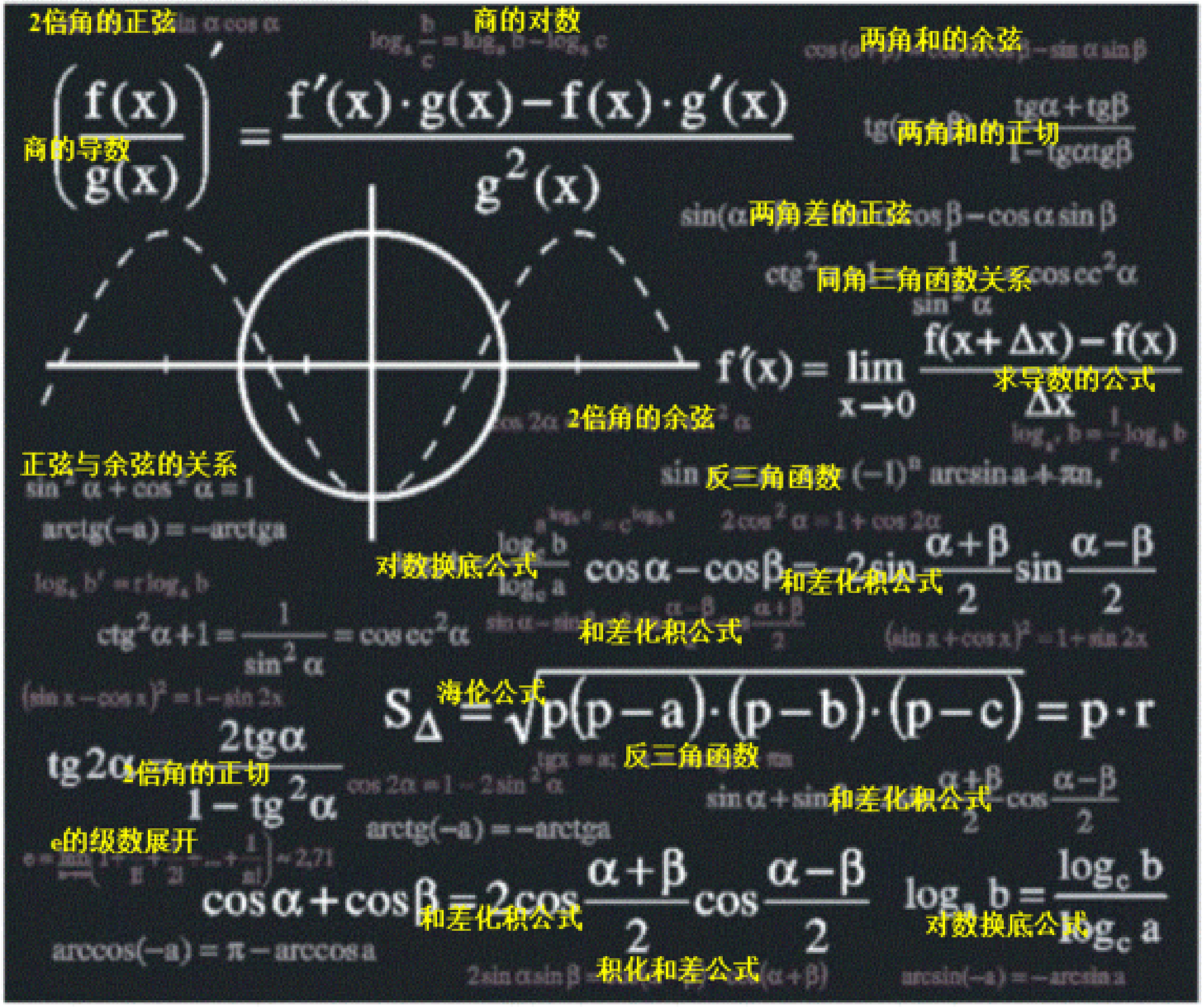

计算极限的若干方法

作者：卢鹏博 (汕头大学)
知乎:@ 卢鹏博

内容校对：**骆美瑾** (汕头大学)、**朱秉启** (汕头大学)
细节审核：**王开元** (中国海洋大学)、**孙逸飞** (江苏航空职业技术学院)

2024 年 11 月 14 日

目录

1 极限的定义

1.1 数列极限

定义 1 (数列极限的定义)：a 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a。

利用数列极限的定义证明极限时，最主要的内容就是找 N。一般都是解不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$，求出一个 N，且不要求 N 为整数。有时不好解时，可以对不等式进行放缩。(因为后面是 $k\varepsilon(k>0)$ 也成立）

【例 1.1.1】求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

证明：取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 对于 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $N=\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ □

【例 1.1.2】求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

证明：取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 对于 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $N=\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-0|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ □

【例 1.1.3】求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}=0(k\in N)$$

证明：总存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，使得 $2^n>n^{k+1}$。对于 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $N=max\{N_1,\frac{1}{\varepsilon},\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-0|=\frac{n^k}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{2^n}=0$ □

【例 1.1.4】已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

证明：由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，因此 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

故

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a\right| &= \left|\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots+a_n-a}{n}\right| \\ &\le \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\ldots+|a_n-a|}{n} \\ &= \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\ldots+|a_N-a|}{n}+\frac{|a_{N+1}-a|+|a_{N+2}-a|+\ldots+|a_n-a|}{n} \\ &\le \frac{M}{n}+\frac{(n-N)\varepsilon}{n} \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ □

注：学过Stolz 定理后，这道题就非常容易了。

【例 1.1.5(难)】已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b,z_n=\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$ 求证：

$$\lim_{n\to\infty}z_n=ab$$

证明：设 $x_n=a+a_n,y_n=b+b_n$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$, 那么

$$\begin{aligned}z_n &= \frac{\sum_{k=1}^n x_ky_{n+1-k}}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n (a+a_k)(b+b_{n+1-k})}{n} \\ &= ab+\frac{\sum_{k=1}^n ab_{n+1-k}+\sum_{k=1}^n ba_k+\sum_{k=1}^n a_kb_{n+1-k}}{n}\end{aligned}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$，因此 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n|<\varepsilon,|b_n|<\varepsilon$$

$n>N$ 时，考虑

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n ba_k}{n}\right|=\left|b\frac{a_1+a_2+\cdots a_N}{n}+b\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{M}{n}+b\varepsilon<K_1\varepsilon$$

那么

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n ab_{n+1-k}}{n}\right|<\left|\frac{M}{n}+b\varepsilon\right|<K_2\varepsilon$$

并且

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n a_kb_{n+1-k}}{n}\right|\le\frac{\sum_{k=1}^n |a_kb_{n+1-k}|}{n}\le M_2\frac{\sum_{k=1}^n |b_{n+1-k}|}{n}<M_3\varepsilon$$

综上，当 $n>N$ 时，有

$$|z_n-ab|\le\frac{|\sum_{k=1}^n ab_{n+1-k}|+|\sum_{k=1}^n ba_k|+|\sum_{k=1}^n a_kb_{n+1-k}|}{n}\le(K_1+K_2+M_3)\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=ab$ □

1.2 函数极限

函数极限的定义：

定义 2 (在某一点的极限) 设 A 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称函数在点 x_0 的极限为 A。记作 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

定义 3 (趋于正无穷的极限) 设 A 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称函数趋于 $+\infty$ 的极限为 A。记作 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$

定义 4 (趋于负无穷的极限) 设 A 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $x<-X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称函数趋于 $-\infty$ 的极限为 A。记作 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$

定义 5 (趋于无穷大的极限) 设 A 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称函数趋于 ∞ 的极限为 A。记作 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$

左右极限：

定义 6 (左极限)：设 A 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称函数在点 x_0 的左极限为 A。记作 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$

定义 7 (右极限)：设 A 是一个常数，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称函数在点 x_0 的右极限为 A。记作 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$

与数列极限类似，用定义证明函数极限存在也是需要找 δ 或 M。

【例 1.2.1】求证：

$$\lim_{x \to 1} x = 1$$

证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ □

【例 1.2.2】求证：

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ □

2 极限的四则运算

定理 1 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ab$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b, b_n \neq 0)$$

定理 2 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$,$\lim_{x\to x_0} g(x) = b$，则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = a - b$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = ab$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b, g(x) \neq 0)$$

其中 x_0 可替换为 $x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty, \infty$。

【例 2.1】求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}\quad(a\neq-1)$$

解：若 $a=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\frac{1}{2}$

若 $|a|<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}a^n}{\lim_{n\to\infty}(a^n+1)}=0$$

若 $|a|>1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{a^n}}=1$$

【例 2.2】求：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{m+1}-1}{x^{n+1}-1}\quad(m,n\in N)$$

解：由于

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-1}b+\cdots+b^{n-1})$$

因此

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{m+1}-1}{x^{n+1}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^m+x^{m-1}+\cdots+1)}{(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^m+x^{m-1}+\cdots+1)}{(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)}=\frac{m+1}{n+1}\square$$

3 夹逼准则 (迫敛性)

3.1 数列极限的迫敛性

定理 1 对于数列 a_n,b_n,c_n，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $b_n\leq a_n\leq c_n$，且有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$$

那么有 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$

【例 3.1.1】求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\pi\rfloor}{n}$$

解：对于任意 x 有

$$x-1<\lfloor x\rfloor\leq x$$

因此

$$n\pi-1<\lfloor n\pi\rfloor\leq n\pi$$

即

$$\pi-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor n\pi\rfloor}{n}\leq\pi$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi-\frac{1}{n}=\pi$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\pi\rfloor}{n}=\pi$ $\square$

【例 3.1.2】求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$$

解：由于

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+2n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

并由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\frac{1}{2}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$ □

【例 3.1.3(难)】求：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{n}{3}\right)$$

解：注意到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{n}{3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{k^2}{n^2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{k^2}{n^2}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)}$$

并且

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+n)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+1)}$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+1)}=\frac{1}{4}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{k^2}{n^2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

3.2 函数极限的夹逼准则

定理 2 对于函数 $f(x),g(x),h(x)$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$，且有

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$$

那么有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

因此利用函数极限的夹逼准则，重要的是寻找合适的 $g(x)$ 和 $h(x)$。

【例 3.2.1**】**求证：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证明：当 $x>0$ 时，由于

$$x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$$

故

$$1-\frac{x^2}{6}\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1$$

因此

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

同理可证

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

因此 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ □

4 重要极限

4.1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

第一个重要极限是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

上节已证明，不再赘述。

需要注意的是，一般题目不会出最原本的形式。实际上，只要 $\square\to 0$，就有 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$(等价无穷小一章也有类似性质)

【例 4.1.1**】**求：

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$$

解：令 $t=x-\pi$，则 $\sin x=\sin t$。因此

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

【例 4.1.2】求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{x^2}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{x^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t\cos t}=1$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x^2}{x^2}=1$ □

【例 4.1.3】求证：

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]\right\}=1$$

证明：由于

$$\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{\sin x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]\right\}=\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

4.2 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

下面不加证明地引入第二个重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

该极限等价于

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

【例 4.2.1】求：

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=e^2$$

【例 4.2.2】求：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

解：一方面

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

另一方面

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq(1+\frac{n-1}{n^2})^{\frac{n^2}{n-1}-2}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=e$ □

4.3 (补充)$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$

数列 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ 是收敛的，它的极限称为欧拉常数，记作 γ。下面证明它收敛。

【例 4.3.1】证明上述数列收敛：

证明：由于

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{k})<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}>\ln n$$

因此

$$a_n>\frac{1}{n}>0$$

又因为

$$a_{n+1}-a_n=\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}<0$$

因此 a_n 单调递减有下界，故 a_n 收敛。 □

【例 4.3.2】求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

解：记

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n)-(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\right]+\ln 2\\&=\lim_{n\to\infty}\left(a_{2n}-a_n+\ln 2\right)\\&=\ln 2\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$ □

【例 4.3.3】求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{kn+1}+\frac{1}{kn+2}+\cdots+\frac{1}{mn}\right)\quad(m,k\in N^{+})$$

提示：仿照上题立得极限为 $\ln\frac{m}{k}$ □

5 Cauchy 收敛准则

定理 1 a_n 是一个数列，若 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

称数列 $\{a_n\}$ 收敛。

推论 1 a_n 是一个数列，若 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in N$ 有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

称数列 $\{a_n\}$ 收敛。

【例 5.1】证明数列 a_n 收敛：

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N = \frac{1}{\varepsilon}$，当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in N$ 有

$$\begin{aligned}
&|a_{n+p} - a_n| \\
&= \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| \\
&\leq \frac{1}{n} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

证毕。 □

【例 5.2】证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 部分和数列 $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 发散：

证明：$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$，对 $\forall N > 0$，即使有 $n > N$，存在 $p = n$，但

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

因此数列 S_n 发散。 □

6 等价无穷小

定义 1 (无穷小)：设函数 $f(x)$，若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量。其中 x_0 可替换为 $x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty, \infty$。

定义 2 (等价无穷小)：设两个 $x\to x_0$ 时的无穷小量 $f(x), g(x)$，若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x), g(x)$ 为 $x\to x_0$ 时等价的无穷小量。

在求极限时，整体等价的无穷小量可以替换。

常用的等价无穷小：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$$

$$a^x-1\sim x\ln a$$

以上全部是 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

注：同重要极限一样，若 $\square\to 0$，则 $\square\sim\sin\square$。其余函数同理。

【例 6.1】求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

【例 6.2】求极限：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\ (a,b\geq 0)$$

解：

（1）若 a,b 至少有一个为 0，则原极限为 0；

（2）若 a,b 都不为 0，则：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}$$

考虑

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1+1\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x-1+b^x-1}{2}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x-1}{2}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{b^x-1}{2}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x\ln a}{2}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x\ln b}{2}\right)\\
&=\ln\sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$ □

注：以此类推

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ (a_i\geq 0, i=1,2\cdots n)$$

【例 6.3】求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

解：注意极限是趋于 ∞ 的，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ □

【例 6.4】求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$$

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}\\
&\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}\\
&\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}\\
&\lim_{x\to 0}\frac{2x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3}\\
&=\boxed{1}
\end{aligned}
$$

注意：此题不能直接用 $2\sin x\sim 2x$ 以及 $\sin 2x\sim 2x$ 直接替换。因为等价无穷小替换时要整体替换，单独替换因式中的项可能会出错。

7 Heine 定理

定理 1 设 $f(x)$ 在 $U^o(x_0,\delta')$ 上有定义，那么 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 极限存在的充要条件是：对任何含于 $U^o(x_0,\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在且相等。

Heine 定理一般用来判断极限不存在或者将求数列极限的问题转化为求函数极限。如果存在一个数列 $\{x_n\}$，使得极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，或者存在两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，虽然极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 和极限 $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 都存在但不相等，则原函数极限不存在。

【例 7.1】 证明下述极限不存在：

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

证明. 我们可以取两个子列 $x_n = 2n$,$y_n = 4n+1$，那么有：

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}\right]=1$$

因此原函数极限不存在。 □

【例 7.2】 计算：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

解：我们只需要计算

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

即可。由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

因此，由 Heine 定理，知

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

8 L'Hospital 法则

8.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式

定理 1 定义：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

(1)$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$;

(2)$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $U^o(x_0,\delta)$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(3)$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

注：x_0 可以换成 $x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty, \infty$，$A$ 可以为 $+\infty, -\infty, \infty$。

【例 8.1.1】计算：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}$$

解：令 $t=\sqrt{x}$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-e^t}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{-e^t}\\&=\boxed{-1}\end{aligned}$$

【例 8.1.2】计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x^2)}$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

【例 8.1.3】计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}\\
&=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}\\
&=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}\\
&=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\
&=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\\
&=-e\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}\\
&=\boxed{-\frac{e}{2}}
\end{aligned}
$$

8.2 $\frac{*}{\infty}$ 型不定式

定理 2 定义：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

(1)$\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

(2)$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $U^o(x_0,\delta)$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(3)$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

注：x_0 可以换成 $x_0^+,x_0^-,+\infty,-\infty,\infty$，$A$ 可以为 $+\infty,-\infty,\infty$。

【例 8.2.1】计算：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2024}}{e^x}$$

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2024}}{e^x}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2024}}}\right)^{2024}\\
&=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{2024}}}\right)^{2024}\\
&=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2024}{e^{\frac{x}{2024}}}\right)^{2024}\\
&=\boxed{0}
\end{aligned}
$$

【例 8.2.2】计算：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\\&=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

【例 8.2.3(易错)】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=1$，则下面哪些是正确的？

$$\begin{aligned}&A.\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x^2}=3\quad B.f''(0)=0\\&C.\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{x}=3\quad D.f'''(0)=0\end{aligned}$$

解：令

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3)$$

则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=1\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=1\end{aligned}$$

因此，要想极限存在，则必有 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，$f'''(0)=6$

可知 B 对，D 错。

对于 A,C 可举反例 $f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x=0\\ x^3+x^4\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{if } x\neq0\end{cases}$

9 Taylor 公式

9.1 带有 Peano 余项的 Taylor 公式

定义 1 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 n 阶导数，则 $f(x)$ 可写成如下形式：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

其中，当 $x_0=0$ 时称为麦克劳林公式。常用的麦克劳林公式有：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + .. + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + .. + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + o(x^n)$$
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(2^{2n}-1)2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + .. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + o(x^{2n})$$

其中 B_n 为第 n 个伯努利数。

事实上，上述公式可以改写为带有同阶无穷小的 Taylor 公式。

【例 9.1.1】求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

解：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

因此：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4))}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} \\
&= \boxed{-\frac{1}{12}}
\end{aligned}$$

【例 9.1.2】求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$$

解：

$$\begin{aligned}
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\\
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\\
&e^x\sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x(1+x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3}\\
&= \boxed{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

【例 9.1.3(难)】求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{e}{x}}\cdot\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{e}{x}\ln(1+x)} - 1}{x^2}\\
&= e^e\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{e}{x}\ln(1+x)}{x^2}\\
&= e^{e+1}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{x^2}
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = 0$$

因此

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1} = 1 + \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)^2 + o\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)^2$$

而

$$\frac{\ln(1+x)}{x}-1=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$$

那么

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)^2=\frac{x^2}{4}+o(x^2)$$

于是

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}=1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
&e^{e+1}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-\frac{\ln(x+1)}{x}}{x^2}\\
&=e^{e+1}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)-\frac{\ln(x+1)}{x}}{x^2}\\
&=\boxed{\frac{e^{e+1}}{8}}
\end{aligned}$$

9.2 带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式

定义 2 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续的导函数，且在 (a,b) 上可导。则至少存在一点 ξ，使得：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中，当 $x_0=0$ 时称为带有 Lagrange 余项的麦克劳林公式。将上式前六个改写得到：

$$\begin{aligned}
&e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\\
&\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+..+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos(\theta x)\\
&\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+..+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos(\theta x)\\
&\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\\
&\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

以及：

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

以上 $0<\theta<1$

9.3 带有积分余项的 Taylor 公式

定义 3 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $n+1$ 阶导函数，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[min\{x,x_0\},max\{x,x_0\}]$ 可积，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

如果令 $f(x)=e^x, x_0=0$，那么有

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{x^k}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^n dt$$

【例 9.3.1】求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}$$

解：使用带有积分余项的麦克劳林公式，得：

$$e^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n dt$$

于是:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n dt}{e^n}\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{\int_0^n e^t(n-t)^n dt}{e^n}\end{aligned}$$

令 $t=nx, dt=ndx$, 则

$$\int_0^n e^t(n-t)^n dt=n^{n+1}\int_0^1 e^{nx}(1-x)^n dx=n^{n+1}\int_0^1 e^{n[x+ln(1-x)]}dx$$

使用Laplace 方法，得：

$$\int_0^1 e^{n[x+ln(1-x)]}dx\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{\int_0^n e^t(n-t)^n dt}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!\cdot e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

又由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n$ $(n\to\infty)$，得：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!\cdot e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{\sqrt{2n\pi}\cdot(\frac{n}{e})^n\cdot e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\\&=\boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

9.4 带有 Cauchy 余项的 Taylor 公式

定义 4 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $n+1$ 阶导函数，则存在 $\xi\in[min\{x,x_0\},max\{x,x_0\}]$，使得：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)dx$$

如果令 $\xi=x_0+\theta(x-x_0),0\leq\theta\leq 1$，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}dx$$

9.5 带有同阶无穷小的 Taylor 公式

定义 5 **(同阶无穷小)**: 若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$$

且存在 A, 使得

$$|f(x)|\leq Ag(x)$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，记作

$$f(x)=O\left(g(x)\right)$$

推论 1 **(同阶无穷小极限形式)**: 若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$$

且存在 A, 使得

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq A$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，记作

$$f(x)=O\left(g(x)\right)$$

那么，带有 Peano 余项的 Taylor 公式可以改写为带有 O 的 Taylor 公式：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + .. + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + O(x^{2m+1})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + .. + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + O(x^{n+1})$$

【例 9.5.1】求：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n$$

解：

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1} = n - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) = n + 1 - \gamma_{n+1} - \ln(n+1)$$

其中

$$\gamma_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

令

$$a_n = \frac{\gamma_{n+1} + \ln(n+1) - 1}{n}$$

那么有:

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-a_n}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
\ln x_n &= -n\ln(1-a_n) - \ln n \\
&= n\left(a_n + \frac{{a_n}^2}{2} + \cdots\right) - \ln n \\
&= n\left[a_n + \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right] - \ln n \\
&= na_n - \ln n + nO\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2 \\
&= \gamma_{n+1} - 1 + \ln\frac{n+1}{n} + nO\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n=\boxed{e^{\gamma-1}}$$

10 压缩映射

定理 1 **(数列的压缩映射)** 对于任意数列 x_n ，若存在 $0<r<1$, 存在 $N>0$，对任意 $n>N$ 都有

$$|x_{n+1}-x_n|\le r|x_n-x_{n-1}|$$

那么 $\{x_n\}$ 收敛。称 $\{x_n\}$ 为压缩数列。

证明：记 $|x_{N_0+1}-x_{N_0}|=M$ 则对任意 $n>N_0, p\in N$, 都有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=\left|\sum_{k=1}^{p}(x_{n+k}-x_{n+k-1})\right|\\&\le\sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|\\&\le\sum_{k=1}^{p}r^{n+k-N_0-1}|x_{N_0+1}-x_{N_0}|\\&=r^{n-N_0}\cdot\frac{1-r^p}{1-r}M\\&\le\frac{M\cdot r^{n-N_0}}{1-r}\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则，知 $\{x_n\}$ 收敛。

推论 1 若 $x_{n+1}=f(x_n)$,$f(x)$ 可导, 且 $\exists r\in(0,1), s.t.|f'(x)|\le r$, 那么 $\{x_n\}$ 收敛。
证明：由于

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)|\cdot|x_n-x_{n-1}|\le r|x_n-x_{n-1}|$$

因此由定理 1 可得 $\{x_n\}$ 收敛。

定义 1 (不动点)：对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in D$，使得

$$f(x_0)=x_0$$

那么称 x_0 为 $f(x)$ 的一个不动点。

定理 2 对于由连续函数 $f(x)$ 迭代生成的数列，即 $x_{n+1}=f(x_n)$, 若 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 那么有 $f(x_0)=x_0$

证明：由于 $\{x_n\}$ 极限存在，只需在 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边同时对 n 取极限，即得

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\quad \text{(Heine 定理)}$$

推论 2 定理 2 的逆否命题成立：即对任意的 $x\in D$, 都有 $f(x)\neq x$, 那么数列 $\{x_n\}$ 发散（极限不存在）。

因此对于一些迭代的数列，我们可以先解 $f(x)=x$ 得到极限值 x_0，然后 $x_0=f(x_0)$ 带入要证的式子即可。即要证 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_0$，只需证 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_0)=\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x_0)]=0$ 即可。

【例 10.1】 数列 $x_0=1$,$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ 有极限，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$

解：由于 $1\leq x_0<2$, 假设 $1\leq x_n<2$，那么 $1\leq x_{n+1}=\sqrt{2x_n}<2$ 成立。

法一：令

$$f(x)=\sqrt{2x},|f'(x)|=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

由推论 1 知 $\{x_n\}$ 收敛,$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ 两边对 n 取极限，得 $x=\sqrt{2x}$ 得 $x=2$

法二：$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ 两边对 n 取极限，得 $x=\sqrt{2x}$ 得 $x=2$，则

$$|x_n-2|=\left|\frac{x_{n+1}^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right|=\frac{1}{2}|x_{n+1}-2|\cdot|x_{n+1}+2|\geq\frac{3}{2}|x_{n+1}-2|$$

记 $q=\frac{2}{3}$ 因此

$$|x_{n+1}-2|\leq\frac{2}{3}|x_n-2|=q|x_n-2|\leq q^2|x_{n-1}-2|\leq\cdots\leq q^n|x_1-2|\to 0(n\to 0)$$

因此 $\lim_{n\to\infty}x_n=2$

【例 10.2(难)】 (1) 设 $f_1(t)=\frac{t+3}{2}$,$f_2(t)=\frac{t+6}{3}$,$\{n_k\}$ 为取值于 $\{1,2\}$ 的整数列。令 $F_1(t)=f_{n_1}(t)$,$F_{k+1}(t)=F_k(f_{n_{k+1}}(t))(k\geq 1)$.
证明：对任何 $x\in R$，极限 $\lim_{k\to\infty}F_k(x)$ 存在，且与 x 无关。
(2) 若题 (1) 中的 f_1,f_2 改为 $f_1(t)=t-\arctan t,f_2(t)=2\arctan t-t$，结论如何？

解：(1) 证明: 由于 $f_1'(t)=\frac{1}{2},f_2'(t)=\frac{1}{3}$, 那么

$$|f_k(t)-f_k(s)|\leq\frac{1}{2}|t-s|\quad(k=1,2)$$

因此 f_1,f_2 均为压缩映射。且它们有且仅有一个共同的不动点 $x_0=3$

那么

$$\begin{aligned}
&|F_k(x)-3| = |f_{n_1}\circ f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_k}(x)-f_{n_1}(3)|\\
&\le \frac{1}{2}|f_{n_2}\circ f_{n_3}\circ\cdots\circ f_{n_k}(x)-3|\\
&= \frac{1}{2}|f_{n_2}\circ f_{n_3}\circ\cdots\circ f_{n_k}(x)-f_{n_2}(3)|\\
&\le \cdots\\
&\le \frac{1}{2^{k-1}}|f_{n_k}(x)-3|\\
&= \frac{1}{2^{k-1}}|f_{n_k}(x)-f_{n_k}(3)|\\
&\le \frac{1}{2^k}|x-3|
\end{aligned}$$

如此可知 $\lim_{k\to\infty}F_k(x)=3$

(2) 我们猜测当 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 拥有相同不动点，且均为压缩映射的时候所求极限存在且与 x 无关。由于

$$f_1'(t)=\frac{t^2}{1+t^2},f_2'(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

令 $|f_k'(t)|\le 1$, 则 $t_0=0$, 且 $|f_k(t)|\le|t|,f_k(t_0)=0$ 下面我们证明

$$\lim_{k\to\infty}F_k(x)=0$$

否则，会存在 $\{F_k(x)\}$ 的子列 $\{F_{m_k}(x)\}$，满足 $0<\delta<|F_{m_k}(x)|\le|x|$ 此时 $|f_1'|,|f_2'|$ 在 $[-|x|,\frac{\delta}{2}]\bigcup[\frac{\delta}{2},|x|]$ 上有上界 l 对任意 $y\in[\delta,|x|]$，有

$$\begin{aligned}
&|f_k(\pm y)| = |f_k(\pm y)-f_k(\pm\frac{\delta}{2})+f_k(\pm\frac{\delta}{2})-f_k(0)|\\
&\le |f_k(\pm y)-f_k(\pm\frac{\delta}{2})|+|f_k(\pm\frac{\delta}{2})-f_k(0)|\\
&\le l(y-\frac{\delta}{2})+\frac{\delta}{2}=ly+(1-l)\frac{\delta}{2}\\
&\le ly+(1-l)\frac{y}{2}\\
&= \frac{l+1}{2}y
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\delta\le|F_{m_k}(x)|=|f_{n_1}\circ f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}|\\
&\le|f_{n_j}\circ f_{n_{j+1}}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}|\\
&\le|x|(j=1,2\cdots m_k)
\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&|F_{m_k}(x)| = |f_{n_1} \circ f_{n_2} \circ \cdots \circ f_{n_{m_k}}| \\
&\leq \frac{l+1}{2} |f_{n_2} \circ \cdots \circ f_{n_{m_k}}| \\
&\leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{m_k} |x|
\end{aligned}
$$

令 $k \to +\infty$ 得 $\lim_{k\to+\infty} |F_{m_k}| = 0$. 矛盾. 因此 $\lim_{k\to+\infty} |F_k| = 0$ □

11 Stolz 定理

Stolz 定理, 又称 Stolz 公式, 数列极限的洛必达法则 (函数洛必达法则参见L'Hospital 法则)，是求一类数列极限的有效方法。

11.1 数列的 Stolz 公式

定理 1 ($\frac{0}{0}$ 型不定式) 若数列 a_n 和 b_n 满足:b_n 单调递减趋于 0，a_n 极限为 0，且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

其中 A 可以为 $+\infty, -\infty$

定理 2 ($\frac{*}{\infty}$ 型不定式) 若数列 a_n 和 b_n 满足:b_n 单调递增趋于 ∞，且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

其中 A 可以为 $+\infty, -\infty$

现在我们用 Stolz 定理重新做一下例题 1.1.4。极限满足定理 2，因此：

$$\lim_{n\to} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to} \frac{a_n}{1} = a$$

【例 11.1.1(难)】设 $S_n=\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$, 求 $\lim_{n\to\infty}S_n$

解：使用 Stolz 公式，有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{C_{n+1}^k}{C_n^k}-\ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n}\ln(n-k+1)=\sum_{k=1}^{n+1}\ln(k)=\ln(n+1)!$$

因此：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln(k)}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\&=\boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

【例 11.1.2】设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(A_n-A_{n-1})=0$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots A_n}{n}$$

存在时，有

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots A_n}{n}$$

证明: 令 $a_1=A_1,a_n=A_n-A_{n-1}(n\geq 2)$, 那么

$$A_n=\left(A_n-\frac{A_1+A_2+\cdots A_n}{n}\right)+\frac{A_1+A_2+\cdots A_n}{n}$$

$$A_n=(A_n-A_{n-1})+(A_{n-1}-A_{n-2})+\cdots+(A_2-A_1)+A_1$$

$$=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$$

$$\lim_{n\to\infty}n(A_n-A_{n-1})=\lim_{n\to\infty}na_n=0$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(A_n-\frac{A_1+A_2+\cdots A_n}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)a_n}{1}\\
&=0
\end{aligned}
$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots A_n}{n}$$

【例 11.1.3**】**设数列 $x_0=a, 0<a<\frac{\pi}{2}, x_n=\sin x_{n-1}(n=1,2\cdots)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$$

证明：先证 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$：（否则待求极限不存在）
因为 $0<a<\frac{\pi}{2}, x_0=a$，因此

$$0<x_n=sinx_{n-1}<x_{n-1}<\frac{\pi}{2}(n=1,2\cdots)$$

因此 x_n 单调递减有下界，x_n 极限存在，记为 x，则有 $x=\sin x$，故 $x=0$，即 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$。下面，我们只需证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=1$$

即可。由于：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n)}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\sin^2 x_n}{x_n^2-\sin^2 x_n}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(2x+o(x))(\frac{x^3}{6}+o(x^3))}\\
&=3
\end{aligned}
$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$ □

11.2 函数形式的 Stolz 公式

定理 3 ($\frac{0}{0}$ 型不定式) 设 $T>0$, 且满足

(1)$0<g(x+T)<g(x)$;

(2)$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

(3)$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 其中 l 可以为 $+\infty,-\infty$

定理 4 ($\frac{*}{\infty}$ 型不定式) 设 $T>0$, 且满足

(1)$g(x+T)>g(x)$;

(2)$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, 且 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内的任一闭区间有界;

(3)$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 其中 l 可以为 $+\infty,-\infty$

【例 11.2.1】 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且内闭有界，$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l$ 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x^{n-1}+\cdots+1}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}}{(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^n}}\\
=&\frac{l}{n+1}
\end{aligned}$$

证毕。 □

11.3 Stolz 定理的逆定理

Stolz 定理的逆定理不一定成立,如取 $x_n=(-1)^n, y_n=n$,虽然有 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$,但 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 不存在。

推论 1 事实上，如果 x_n, y_n 满足 Stolz 条件，且有 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 都存在，那么我们只要知道 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 即可。因为使用 Stolz 定理，立马得到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

但是如果要用这个结论，我们需要事先已知或者证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 极限存在。下面的定理不需要事先已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$，但是增加了一些其它条件，从极限本身性质出发，判断 Stolz 定理的逆定理是否成立。

定理 5 ($\frac{*}{\infty}$ 型) 若 $\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$，且存在 $N>0, A\in R$，当 $n>N$ 时，有 $y_{n+1}>y_n$，则：(1) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}=A, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$$

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n-x_{n-1}}=A, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$$

注:l 可为 $+\infty, -\infty$

【例 11.3.1】求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k-(n-1)^k}{e^n-e^{n-1}}$$

解：首先

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{\frac{n}{k}}}\right)^k=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k}{e^{\frac{n}{k}}}\right)^k=0$$

且符合定理 5 条件，则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k-(n-1)^k}{e^n-e^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=\boxed{0}$$

定理 6 ($\frac{0}{0}$ 型) 若 $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n=0$，且存在 $N>0, A\in R$，当 $n>N$ 时，有 $y_{n+1}<y_n$，则：(1) 若 $\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}$ 有上界，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$$

(2) 若 $\frac{x_n}{x_n-x_{n-1}}$ 有上界，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$$

定理 7 (函数形式的 Stolz 逆定理) 设 $T>0, A, l\in R$, 且满足 $g(x+T)>g(x)$,$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$。若有:
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l.$
(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=\infty.$

定理 8 设 $T>0, l\in R$, 且满足 $g(x+T)<g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$。若有:
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}$ 有上界, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l.$
(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}$ 有上界, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=\infty.$

12 中值定理

12.1 微分中值定理

在求解极限问题时，我们会经常遇到极限式中包含有一个或两个函数函数值的差的结构。这种情况，我们可以考虑使用拉格朗日中值定理以及柯西中值定理，将函数差值写成导数的形式。有时候这种操作能够极大简化运算，进而更易求出极限。

12.1.1 Rolle 中值定理

定理 1 设 $f(x)$ 满足:
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
(2) 开区间 (a,b) 可导;
(3)$f(a)=f(b)$.
则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$

12.1.2 Lagrange 中值定理

定理 2 设 $f(x)$ 满足:
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
(2) 开区间 (a,b) 可导;
则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

【例 12.1.2.1】求:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(\xi\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}))\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=\boxed{1}
\end{aligned}$$

【例 12.1.2.2】求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\ln(1+x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^\xi(x-\sin x)}{x^2\ln(1+x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)))}{x^3}\\
&=\boxed{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

12.1.3 Cauchy 中值定理

定理 3 设 $f(x),g(x)$ 满足：
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 连续;
(2) 开区间 (a,b) 可导;
(3)$f'(x)$,$g'(x)$ 不同时为 0;
(4)$g(a)\neq g(b)$.
则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-(a)}$

【例 12.1.3.1】求:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^x)-\sin(2^x)}{2^{x^x}-2^{2^x}}$$

解：令 $f(x)=\sin x, g(x)=2^x$，则

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^x)-\sin(2^x)}{2^{x^x}-2^{2^x}}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{\cos\xi}{2^\xi\ln 2}(\xi\in(min\{x^x,2^x\},max\{x^x,2^x\}))\\
&=\boxed{\frac{\cos 4}{16\ln 2}}
\end{aligned}$$

【例 12.1.3.2】求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$$

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}(a-b)x}{\cos\xi(a-b)x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}}{\cos\xi}\\
&=\boxed{1}
\end{aligned}$$

12.2 积分中值定理

积分中值定理与微分中值定理有许多相似之处。如将一个变限积分看作一个函数 $f(x)$, 那么也可以对 $f(x)$ 使用微分中值定理（满足条件时）。但也有些不同，尤其是积分第二中值定理，形式上有些许不同。

12.2.1 积分第一中值定理

定理 4 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

定理 5 设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，那么至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

定理 6 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，那么至少存在一点 $(\xi,\eta))\in D$，使得：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\sigma_0$$

其中 σ_0 为 D 的面积。

定理 7 设 $f(x,y),g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$g(x,y)$ 在 D 上不变号，那么至少存在一点 $(\xi,\eta))\in D$，使得：

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)d\sigma$$

【例 12.2.1.1】求:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin^n x dx$$

解：由积分中值定理，存在 $\xi_n\in[0,1]$，使得：

$$\int_0^1 \sin^n x dx=(1-0)\sin^n\xi_n$$

由于 $\xi_n\in[0,1]$，因此 $0\le\sin^n\xi_n\le\sin^n 1\to 0(n\to\infty)$ 因此 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sin^n xdx=0$ □

【例 12.2.1.2】求:

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dx$$

解：由积分中值定理，存在 $\xi_n\in[x,3x]$，使得：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dx\\&=\lim_{x\to 0}\cos\xi\int_x^{3x}\frac{1}{t}dx\\&=\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{1}{t}dx\\&=\lim_{x\to 0}\ln 3x-\ln x\\&=\boxed{\ln 3}\end{aligned}$$

【例 12.2.1.3】求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sin x}^{x}\sin t^2dx}{x^5}$$

解：由积分中值定理，存在 $\xi_n\in[\sin x,x]$，使得：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sin x}^{x}\sin t^2dx}{x^5}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\sin\xi^2}{x^5}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}\sin\xi^2}{x^5}\\&=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}(\frac{\xi}{x})^2\\&=\boxed{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

12.2.2 积分第二中值定理

定理 8 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 为单调函数，那么至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

定理 9 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x) \geq 0$ 且为单调递减函数，那么至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dxdx$$

定理 10 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x) \geq 0$ 为单调递增函数，那么至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

【例 12.2.2.1(**难**)**】**求:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}(\cos x^2)^2 dx$$

解：换元 $t = x^2, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$，则：

$$\begin{aligned}
I &= \int_n^{n+1}(\cos x^2)^2 dx \\
&= \int_{n^2}^{(n+1)^2}(\cos t)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\
&= \int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{1+\cos 2t}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\
&= \int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{4\sqrt{t}}dt + \int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}}dt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

对于 I_1:

$$I_1 = \int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{4\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{t}}{2}\Big|_{n^2}^{(n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

对于 I_2:

$$I_2 = \int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{\cos 2t}{4\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4n}\int_{n^2}^{\xi}\cos 2tdt + \frac{1}{4(n+1)}\int_{\xi}^{(n+1)^2}\cos 2tdt$$

而

$$I_2 \geq \frac{1}{4(n+1)}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\cos 2tdt = \frac{\sin 2(n+1)^2 - \sin 2n^2}{8(n+1)} \geq -\frac{1}{4(n+1)}$$

$$I_2 \leq \frac{1}{4n}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\cos 2tdt = \frac{\sin 2(n+1)^2 - \sin 2n^2}{8n} \leq \frac{1}{4n}$$

因此

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4(n+1)}\leq\int_{n}^{n+1}(\cos x^2)^2dx\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n}^{n+1}(\cos x^2)^2dx=\boxed{\frac{1}{2}}$$

13 定 (重) 积分定义

我们经常会遇到一类求和的积分，有时候使用夹逼准则可能无法做出来，那我们就可以考虑使用定积分的定义求该积分。根据定积分的定义，也可以求解一类求和的积分。

13.1 定积分定义

定义 1 设闭区间 [a,b] 上有 $n-1$ 个点，分别为：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

每个小区间记为

$$\Delta_i=[x_{i-1},x_i],i=1,2..n.$$

这些分点或区间称为 $[a,b]$ 的一个分割，记为 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 或 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$. 每个小区间的长度记为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$$

记

$$||T||=max_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$$

为 T 的模。

定义 2 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，J 是实数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得对 $[a,b]$ 上的任意分割 T, 及 $\xi_i\in\Delta_i$, 只要 $||T||<\delta$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$$

那么称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，J 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作：

$$J=\int_a^b f(x)dx$$

推论 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，一种常用的分割为 $\Delta_i=\frac{b-a}{n}$，那么根据定积分的定义，可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})$$

【例 13.1.1】求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}(k\geq 0)$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}i^k}{n^k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^k\\&=\int_0^1 x^k dx\\&=\boxed{\frac{1}{k+1}}\end{aligned}$$

【例 13.1.2】求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n}$$

解：

$$\frac{\sqrt{n!}}{n}=e^{\frac{\ln n!}{n}-\ln n}=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n}\\&=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\\&=\int_0^1\ln x dx\\&=(x\ln x-x)|_0^1\\&=-1\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n}=\boxed{\frac{1}{e}}$$

【例 13.1.3(难)】 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续，求证:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})-\int_a^b f(x)dx\right]=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$$

证明：将 $f(x)$ 在

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

处用带有拉格朗日余项的泰勒公式展开，则存在

$$\xi_k\in\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}\right)\quad(k=1,2\cdots n)$$

使得

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

由于

$$(b-a)\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})=\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x_k)dx$$

$$n\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)dx$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导函数连续，那么

$$\exists M=max|f''([a,b])|$$

且有

$$\begin{aligned}
&\left|(b-a)\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-n\int_a^b f(x)dx+\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f'(x_k)(x-x_k)dx\right|\\
&=\left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}[f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)-f(x)]dx\right|\\
&=\left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2dx\right|\\
&\le\frac{M}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}(x-x_k)^2dx\right|\\
&=\frac{M}{6}\left|\sum_{k=1}^{n} n(x-x_k)^3\ \Big|_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\right|\\
&=\frac{M(b-a)^3}{6n}\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[(b-a)\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-n\int_a^b f(x)dx\right]\\
&=-\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} n\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f'(x_k)(x-x_k)dx\right]\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} nf'(x_k)(x-x_k)^2\mid_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^2}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(a+k\frac{b-a}{n})\\
&=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx\\
&=\boxed{\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]}
\end{aligned}
$$

注：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $p+1$ 阶导函数，则此题还可以推广到如下形式：

$$
\lim_{n\to\infty} n^p\left\{\left[\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot\frac{(b-a)^{k+1}}{k!\cdot(k+1)n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(x_i)\right]-\int_a^b f(x)dx\right\}=\frac{(-1)^{p+1}(b-a)^p}{(p+1)!}\left[f^{(p-1)}(b)-f^{(p-1)}(a)\right]
$$

其中 $x_i=a+i\frac{b-a}{n}(i=1,2\cdots n)$

由于证明过程较为繁琐，此处不再叙述。具体证明过程详见加边问题。

13.2 重积分定义

仿照定积分的定义，我们可以类似地定义二重积分。

定义 3 将区域 D 分成 n 个小区域 $\sigma_i(i-1,2,\cdots,n)$，每个小区域的面积也记为 $\sigma_i(i-1,2,\cdots,n)$。这些小区域称为 D 的一个分割，记为

$$T=\{\sigma_1,\sigma 2,\cdots,\sigma_n\}$$

每个小区域的直径记为

$$d_i=max\{|x-y|\}(\forall x,y\in\sigma_i)$$

记

$$||T||=max_{1\leq i\leq n}\{d_i\}$$

为 T 的细度。

定义 4 设 $f(x,y)$ 是定义在 D 上的函数，J 是实数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得对 D 上的任意分割 T, 及 $(\xi_i,\eta_i)\in\sigma_i$, 只要 $||T||<\delta$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\sigma_i - J\right| < \varepsilon$$

那么称 $f(x,y)$ 在 D 上可积，J 为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分，记作：

$$J=\iint_D f(x,y)d\sigma$$

推论 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，$g(x)$ 在 $[c,d]$ 上黎曼可积，$D=[a,b]\times[c,d]$。根据二重积分的定义，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\cdot\frac{d-c}{n}\sum_{j=1}^{n} f(c+j\frac{d-c}{n})=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy$$

推论 3 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积。根据二重积分的定义，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n},c+j\frac{d-c}{n})=\iint_D f(x,y)dxdy$$

【例 13.2.1】求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2\sin\frac{j\pi}{2n}$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2\sin\frac{j\pi}{2n}\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\sum_{j=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{j}{n}\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2dx\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}y\right)dy\\
&=\boxed{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

【例 13.2.2】求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}{(\frac{i}{n})^2+(\frac{j}{n})^2}\\&=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy\end{aligned}$$

使用极坐标代换，令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\rho d\rho\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}(\sin\theta+\cos\theta)d\rho\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta}d\theta\\&=2(1-\ln|\cos x|)|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\boxed{\frac{\pi}{2}+\ln 2}\end{aligned}$$

三重及以上重积分与二重积分类似，不再赘述。

14 Gauss 取整函数

定义 1 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过 x 的最大整数，$\lceil x\rceil$ 为不小于 x 的最小整数。$\lfloor x\rfloor$ 和 $\lceil x\rceil$ 统称为 Gauss 取整函数。

$\lfloor x\rfloor$ 称为向下取整函数，如 $\lfloor 2.5\rfloor=2,\lfloor -1.5\rfloor=-2$

$\lceil x\rceil$ 称为向上取整函数，如 $\lceil 2.5\rceil=3,\lceil -1.5\rceil=-1$

推论 1 若记 $\{x\}$ 为 x 的小数部分，则 $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$

【例 14.1(难)】求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left\lfloor\frac{2n}{k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left\lfloor\frac{2n}{k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)\\
&=\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)dx\\
&=\int_1^{+\infty}\frac{\lfloor 2t\rfloor-2\lfloor t\rfloor}{t^2}dt(t=\frac{1}{x})\\
&=\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\frac{\lfloor 2t\rfloor-2\lfloor t\rfloor}{t^2}dt
\end{aligned}$$

当 $k\le 2t<k+1$ 时，$\lfloor 2t\rfloor=k$

若 $k=2i(i=1,2\cdots)$ 为偶数，则 $i\le t<i+\frac{1}{2}$，此时 $\lfloor 2t\rfloor-2\lfloor t\rfloor=2i-2i=0$

若 $k=2i-1(i=2,3\cdots)$ 为奇数，则 $i-\frac{1}{2}\le t<i$，此时 $\lfloor 2t\rfloor-2\lfloor t\rfloor=2i-1-2(i-1)=1$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\frac{\lfloor 2t\rfloor-2\lfloor t\rfloor}{t^2}dt\\
&=\sum_{i=2}^{\infty}\int_{i-\frac{1}{2}}^{i}\frac{1}{t^2}dt\\
&=\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{2}{2i-1}-\frac{2}{2i}\right)\\
&=2\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)\\
&=2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)-1
\end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\ln 2
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left\lfloor\frac{2n}{k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)=\boxed{2\ln 2-1}$$

【例 14.2(**难**)**】**求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n}{k}\right\}^2$$

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n}{k}\right\}^2\\
&=\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}^2dx\\
&=\int_1^{+\infty}\frac{\{t\}^2}{t^2}dt\\
&=\int_1^{+\infty}\frac{(t-\lfloor t\rfloor)^2}{t^2}dt\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{(t-k)^2}{t^2}dt\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left(1-\frac{2k}{t}+\frac{k^2}{t^2}\right)dt\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{k+1}-2k\ln\frac{k+1}{k}\right)
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$, 记 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 又由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 则

$$H_n=\ln n+\gamma+o(1)$$

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + o(1)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(2-\frac{1}{k+1}-2k\ln\frac{k+1}{k}\right)\\
&= 2n-(H_{n+1}-1)-2\sum_{k=1}^{n}[(k+1)\ln(k+1)-k\ln k]+2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\
&= 2n+1-H_{n+1}-2(n+1)\ln(n+1)+2\ln(n+1)!\\
&= 2n+1-(\ln(n+1)+\gamma+o(1))-2(n+1)\ln(n+1)\\
&+2\left(\ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1)-n-1+o(1)\right)\\
&= -1-\gamma+\ln(2\pi)+o(1)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n}{k}\right\}^2\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{k+1}-2k\ln\frac{k+1}{k}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2-\frac{1}{k+1}-2k\ln\frac{k+1}{k}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}(-1-\gamma+\ln(2\pi)+o(1))\\
&=\boxed{-1-\gamma+\ln(2\pi)}
\end{aligned}$$

15 拟合法

拟合法在求极限或证明不等式中有重要作用。拟合法的主要思想是将要证的式子“变形”，变得和已知及待证形式相似，之后就好操作了。

比如要证 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，只需要证 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 即可。听着很简单，但是实际情况可能是 a_n 比较复杂，而 a 比较简洁。这时候只将 a 移到左边其实对做题没有什么帮助。我们应该将 a 变形一下，化成和 a_n 形式类似的式子就好计算了。

【例 15.1】 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=A$$

证明：由

$$A=\frac{nA}{n}=\frac{A+A+\cdots+A}{n}$$

那么

$$\begin{aligned}&|\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}-A|\\&=|\frac{a_1-A+a_2-A+\cdots+a_n-A}{n}|\\&\le\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

因此

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_0>0,\forall n>N_0,s.t.|a_n-A|<\varepsilon$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\\&=\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_{N_0}-A|}{n}\\&+\frac{|a_{N_0+1}-A|+|a_{N_0+2}-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}\\&<\frac{M}{n}+\frac{n-N_0}{n}\varepsilon\\&<2\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=A$$

【例 15.2**】** 已知 $f(x)\sim x(x\to 0),x_n=\sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

证明：事实上，如果 $f(x)=x$, 那么

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)=\sum_{i=1}^n\frac{2i-1}{n^2}a=a$$

因此我们用 $\sum_{i=1}^n\frac{2i-1}{n^2}a$ 替换 a 进行拟合。

那么我们只需要证明 $|x_n - a| < \varepsilon$ 即可，即

$$
\begin{aligned}
&|x_n - a| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i-1}{n^2}a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}a\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left|f(\frac{2i-1}{n^2}a) - \frac{2i-1}{n^2}a\right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

即可。而

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon$$

因此我们只需

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a\right| < \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon$$

即可。事实上，由于 $f(x) \sim x(x \to 0)$, 那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N$ 时，取较小的 δ，使得 $0 < \left|x - \frac{2i-1}{n^2}a\right| < \delta$，那么就有

$$\left|\frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a}$$

因此

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right) - \frac{2i-1}{n^2}a\right| < \frac{2i-1}{n^2}\varepsilon$$

证毕。 □

注：由于 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)(x \to 0)$，因此将 x 换成其它函数也成立。

【例 15.3】 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$$

证明：由于

$$1 = \frac{(1+1)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

因此

$$a = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a$$

那么

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k - a\right|\\&=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a\right|\\&\le \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k|a_k-a|\end{aligned}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 那么 $|a_n| < M$, 且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k|a_k-a|\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_0}C_n^k|a_k-a|+\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_0+1}^{n}C_n^k|a_k-a|\\&<\frac{M(1+n+n^2+\cdots+n^{N_0})}{2^n}+\varepsilon\sum_{k=N_0+1}^{n}\frac{C_n^k}{2^n}\\&<2\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k = a$$

【例 15.4】求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{n}{3}$$

解：我们可以尝试将 $\frac{n}{3}$ 进行拟合。虽然

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}\sim\frac{n}{3}(n\to\infty)$$

但是对做题没有帮助，但是如果注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}$$

那么

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{n}{3}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}-(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6n})\\&=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{k^2}{n^2})+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{k^2}{n^2})=-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+n)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+1)}$$

又由

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+n)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n}\\&\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2(n^2+1)}=\frac{1}{4}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{n^2+k}-\frac{k^2}{n^2})+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\&=\boxed{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

【例 15.5】若 $f(x) \in C[0,1]$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

证明：我们证明一个结论更强的式子：我们只需证明

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

即可，那么由海涅归结原则，取数列 $x_n = \frac{1}{n} \to 0^+(n\to+\infty)$ 那么就会有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\frac{1}{n}}{x^2+(\frac{1}{n})^2}f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

我们下面证明

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

证明：事实上，若 $f(x)=1$，那么有

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

因此，我们只需要证明：

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx = 0$$

即可。由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，因此

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta_1<1,\forall 0<x<\delta_1\ s.t.|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}\\
&\exists M>0,\forall x\in[0,1],\ s.t.|f(x)|\le M
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx\right|\\
&\le\left(\int_0^{\delta_1}+\int_{\delta_1}^1\right)\frac{h}{x^2+h^2}|f(x)-f(0)|dx\\
&=I_1+I_2
\end{aligned}$$

对于 I_1

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{\delta_1}\frac{h}{x^2+h^2}|f(x)-f(0)|dx\\
&\le\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\delta_1}\frac{h}{x^2+h^2}dx\\
&=\frac{\varepsilon}{\pi}\left(\arctan\frac{\delta_1}{h}-0\right)
\end{aligned}$$

当 $h \to 0^+$ 时，$\frac{\delta_1}{h} \to +\infty$, 此时

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta_1}{h} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

对于 I_2

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\delta_1}^{1} \frac{h}{x^2+h^2}|f(x)-f(0)|dx \\
&\le M\int_{\delta_1}^{1} \frac{h}{x^2+h^2}dx \\
&= M\left(\arctan\frac{1}{h} - \arctan\frac{\delta_1}{h}\right)
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{h\to 0^+} M\left(\arctan\frac{1}{h} - \arctan\frac{\delta_1}{h}\right) = M\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

因此 $\exists \delta_2 > 0, \forall 0 < x < \delta_2, s.t$

$$M\left(\arctan\frac{1}{h} - \arctan\frac{\delta_1}{h}\right) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, \forall 0 < x < \delta, s.t.$

$$\left|\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx\right| \le \varepsilon$$

因此

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

【例 15.6】 $\forall b > 0, f(x) \in R[0,b]$，且有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ 证明:

$$\lim_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)dx = a$$

证明：由于当 $t \neq 0$ 时，有

$$t\int_0^{+\infty} e^{-tx}adx = a$$

因此只需要证明

$$\lim_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} e^{-tx}[f(x)-a]dx = 0$$

即可。由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$，那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, s.t.|f(x)-a| < \varepsilon$ 而 $\forall b > 0, f(x) \in R[0,b]$ 则 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 有界，即:

$$|f(x)| \le M',\ |f(x)-a| \le |f(x)| + |a| \le M$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|t\int_0^{+\infty} e^{-tx}[f(x)-a]\right| \\
&\le t\int_0^{+\infty} e^{-tx}|f(x)-a| \\
&= t\int_0^{A} e^{-tx}|f(x)-a| + t\int_A^{+\infty} e^{-tx}|f(x)-a| \\
&\le Mt\int_0^{A} e^{-tx}dx + \varepsilon\cdot t\int_A^{+\infty} e^{-tx}dx \\
&= M(1-e^{-At}) + \varepsilon e^{-At} \to 0(t\to 0^+)
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)dx = a$$

证毕。 □

16 级数收敛的必要条件

定理 1 级数 $\sum a_n$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

因此若级数 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

下面是一些判断级数敛散性的常用方法：

定理 2 (级数收敛的 Cauchy 准则) 设 $\sum a_n$ 为一级数，则其收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$ 对任意 $m>N, p\in N$ 都有

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+p}|<\varepsilon$$

定理 3 (比较原则) 对于正项级数 $\sum a_n$, 若存在一个收敛的正项级数 $\sum b_n$，且存在 N, 当 $n>N$ 时，有 $a_n\le b_n$，则级数 $\sum a_n$ 收敛。
若存在一个发散的正项级数 $\sum c_n$，且存在 N, 当 $n>N$ 时，有 $a_n\ge c_n$，则级数 $\sum a_n$ 发散。

推论 1 $\sum a_n, \sum b_n$ 是两个正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$$

(1) 若 $0<l<+\infty$，则 $\sum a_n, \sum b_n$ 同敛散;
(2) 若 $l=0$, 则 $\sum b_n$ 收敛时，$\sum a_n$ 也收敛;
(3) 若 $l=+\infty$, 则 $\sum b_n$ 发散时，$\sum a_n$ 也发散。

定理 4 (比值判别法) 设 $\sum a_n$ 为正项级数，存在 N 及常数 q, 当 $n > N$ 时，有
(1)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

则级数 $\sum a_n$ 收敛;
(2)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

则级数 $\sum a_n$ 发散.

推论 2 设 $\sum a_n$ 为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

则
(1)$q < 1$ 时级数 $\sum a_n$ 收敛;
(2)$q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时级数 $\sum a_n$ 发散.

推论 3 设 $\sum a_n$ 为正项级数
(1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$$

时级数 $\sum a_n$ 收敛;
(2)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$$

时级数 $\sum a_n$ 发散.

定理 5 (根值判别法) 设 $\sum a_n$ 为正项级数，存在 N 及常数 l, 当 $n > N$ 时，有
(1)

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l < 1$$

则级数 $\sum a_n$ 收敛;
(2)

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

则级数 $\sum a_n$ 发散.

推论 4 设 $\sum a_n$ 为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

则

(1)$l < 1$ 时级数 $\sum a_n$ 收敛;

(2)$l > 1$ 或 $q = +\infty$ 时级数 $\sum a_n$ 发散.

推论 5 设 $\sum a_n$ 为正项级数

(1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$$

时级数 $\sum a_n$ 收敛;

(2)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$$

时级数 $\sum a_n$ 发散.

定理 6 (积分判别法) 设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty]$ 上的非负单调减函数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充要条件是反常积分 $\int_1^{+\infty}$ 收敛。

推论 6 设 $f(x)$ 为 $[N_0, +\infty]$ 上的非负单调减函数，则级数 $\sum_{n=N_0}^{\infty} f(n)$ 收敛的充要条件是反常积分 $\int_{N_0}^{+\infty}$ 收敛。

定理 7 (拉贝判别法) 设 $\sum a_n$ 为正项级数，存在 $N > 0$ 及常数 r，当 $n > N$ 时若：

(1)

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq > 1$$

则 $\sum a_n$ 收敛;

(2)

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$$

则 $\sum a_n$ 发散.

推论 7 设 $\sum a_n$ 为正项级数，且有：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r$$

(1)$r > 1$ 时，$\sum a_n$ 收敛;

(2)$r < 1$ 时，$\sum a_n$ 发散.

对于一般项级数，以下是常用的判别方法：

定理 8 (莱布尼兹判别法) 若交错级数 $\sum(-1)^n a_n$ $(a_n>0)$ 满足：
(1)a_n 单调递减；
(2)$\lim_{n\to\infty} a_n=0$
则级数 $\sum(-1)^n a_n$ $(a_n>0)$ 收敛。

定理 9 绝对收敛的级数一定收敛.

定理 10 (阿贝尔判别法) 设 $\{a_n\}$ 单调有界，$\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

定理 11 (狄利克雷判别法) 设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0，$\sum b_n$ 部分和有界，则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

【例 16.1**】**证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

证明：考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 由比值判别法

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\\
=&\frac{1}{e}<1
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

17 Toeplitz 定理与 Abel 变换

在求极限时，有时会遇到形如 $\lim_{n\to\infty}\sum a_n b_n$ 两个数列之积求和的问题。有时可以尝试使用定积分的定义或夹逼准则，有时需要将和式变形才能求出极限。Toeplitz 定理可以解决一类特殊的数列之积求和的极限问题。而 Abel 变换 (也称分部求和法)，能将被求和式“降次”，从而化成较为简单的形式，更易求出极限。

17.1 Toeplitz 定理

定理 1 设 $y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j$, 若满足：
(1)$a_{nj} \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n$;
(2)$\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1$;
(3)$\forall j, \lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$.
若 $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j = l$

定理 2 设 $y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j$, 若满足：
(1)$\exists k > 0$ 使得 $\forall n \in N$，有 $|a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn}| \leq k$;
(2)$\forall j, \lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$.
若 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j = 0$

定理 3 设 $y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j$, 若满足：
(1)$\exists k > 0$ 使得 $\forall n \in N$，有 $|a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn}| \leq k$;
(2)$\forall j, \lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$;
(3)$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1$
若 $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ 则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j = l$

【例 17.1.1】若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

证明：取 $t_{nj} = \frac{1}{n}$, 符合定理 1 条件，因此：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

【例 17.1.2】若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} = ab$$

证明：

(1) 若 $a = 0$, 取 $t_{nj} = \frac{y_i}{n}$, 此时符合定理 2 条件，因此 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

(2) 若 $a \neq 0$，由于

$$z_n = \frac{(x_1 - a)y_n + (x_2 - a)y_{n-1} + \cdots + (x_n - a)y_1}{n} + a\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

其中第一项由 (1) 知极限为 0，第二项由【例 17.1.1】知极限为 ab □

【例 17.1.3】设 $p_i > 0$ 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n} = 0, \lim_{n\to\infty} S_n = s$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_0p_n + S_1p_{n-1} + \cdots + S_np_0}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = s$$

证明：令 $a_{nj} = \frac{p_{n-j}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}$, 那么 $a_{nj} > 0, \sum_{j=0}^n a_{nj} = 1$, 且 $\forall j$, 有

$$0 < a_{nj} = \frac{p_{n-j}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} < \frac{p_{n-j}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}} \to 0(n \to \infty)$$

因此 $\lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$

故由定理 1 知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_0p_n + S_1p_{n-1} + \cdots + S_np_0}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = s$$

17.2 Abel 变换

定理 4 令 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i, B_0 = 0$, 那么有

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k = a_nB_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k$$

【例 17.2.1(难)】证明:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^\infty \frac{\cos ix}{i} = +\infty$$

证明：首先，考虑 $S_n = \sum_{i=1}^n \cos ix = \sum_{i=1}^n \frac{\cos ix \cdot \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ 又由

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

因此

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\sin(i+\frac{1}{2})x - \sin(i-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

因此 S_n 有界。根据 Dirichlet 判别法知无穷级数收敛。

由于 $\cos(-x) = \cos x$，因此不妨设 $x > 0$ 使用 Abel 变换，那么有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos ix}{i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i - S_{i-1}}{i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} S_i \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{S_i}{i(i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i}{i(i+1)}
\end{aligned}$$

对于 $\forall 0 < x < \frac{1}{2}$, 取 n_0, 使得

$$x(n_0 - \frac{1}{2}) \le \frac{\pi}{2} < x(n_0 + \frac{1}{2})$$

以及运用 $\sin x > \frac{2}{\pi}x(0 < x < \frac{\pi}{2})$ 我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2sin\frac{x}{2}} \frac{sin(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{i(i+1)} \\
&\geqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{2sin\frac{x}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{sin(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)} \\
&\geqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{sin(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}[\sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{sin(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)} + \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{sin(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)}] \\
&\geqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}[\sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{sin(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)} - \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}] \\
&\geqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{(i+\frac{1}{2})x}{i(i+1)} - \frac{1}{xn_0} \\
&\geqslant -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{xn_0} \\
&\geqslant -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\ln n_0 - 1) - \frac{4}{2\pi - 1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

由于 $x \to 0^+$ 时，$n_0 \to \infty$，因此 $\lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos ix}{i} = +\infty$ □

【例 17.2.2】 设 $\{a_n\}$ 严格单调递增趋于 ∞，且 $a_n > 0$,$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛于 B, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{a_n}=0$$

证明：令 $B_n=\sum_{i=1}^{n}b_i$, 则 $\lim_{n\to\infty}B_n=B$, 由 Abel 变换，得：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\\
&=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_i\\
&=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_i+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B-(a_n-a_1)B\\
&=a_1B+a_n(B_n-B)-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(B_i-B)
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1B+a_n(B_n-B)}{a_n}=0$$

因此只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(B_i-B)}{a_n}=0$$

而

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(B_i-B)}{a_n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)(B_i-B)-\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(B_i-B)}{a_{n+1}-a_n}\\
&=\lim_{n\to\infty}(B_n-B)\\
&=0
\end{aligned}$$

证毕. □

【例 17.2.3(难)】对于 $\forall m \geq 2$ 且 $m \in N$ 证明:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m + i \cdot n^{m-2}} - \frac{n}{m+1}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}$$

证明：在正式证明之前，我们需要先知道

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m} = \frac{n}{m+1} + \frac{1}{2} + o(1)(n \to \infty)$$

下面我们证明这个结论：易知 $\sum_{i=1}^{n} i^m = a_{m+1}n^{m+1} + a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0$ 因此

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m} = a_{m+1}n + a_m + o(1)(n \to \infty)$$

因此

$$a_{m+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

那么

$$a_m = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m} - \frac{n}{m+1} \right)$$

根据定积分定义中例【13.1.3】的结论可知

$$a_m = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m} - \int_0^1 x^m dx \right) = \frac{1}{2}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m} = \frac{n}{m+1} + \frac{1}{2} + o(1)(n \to \infty)$$

下面使用两种方法证明本题：

(法一)Abel 变换:

记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^m$ 使用 Abel 变换, 得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m + i \cdot n^{m-2}} \\
&= \frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n^m + (i+1)n^{m-2}} - \frac{1}{n^m + i \cdot n^{m-2}} \right) S_i \\
&= \frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{S_i}{n^{m-2}} \frac{1}{(n^2 + i + 1)(n^2 + i)}
\end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^m}{n^m + i \cdot n^{m-2}} - \frac{n}{m+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{n^m + n^{m-1}} - \frac{n}{m+1} \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{S_i}{n^{m-2}} \frac{1}{(n^2 + i + 1)(n^2 + i)} \right)
\end{aligned}$$

对于第一项：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^m+n^{m-1}}-\frac{n}{m+1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^m}\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{n}{m+1}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{m+1}+\frac{1}{2}+o(1)\right)\frac{n}{n+1}-\frac{n}{m+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{n}{(n+1)(m+1)}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

对于第二项, 先考虑

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+0)(n^2+0)}\right)$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{n^4}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}j^m}{n^m}\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(\frac{j}{n})^m-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(\frac{j}{n})^m\\
&=\int_0^1dx\int_0^x y^m dy\\
&=\frac{1}{(m+1)(m+2)}\\
&=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式 $\sum a_nb_n\le\sqrt{(\sum a_n^2)(\sum b_n^2)}(a_n,b_n>0)$, 以及 $\sum a_n^2\le(\sum a_n)^2(a_n>0)$ 因此

$$\sum a_nb_n\le\sum a_n\cdot\sqrt{(\sum b_n^2)}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+i+1)(n^2+i)}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{n^4}\right| \\
=&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\frac{2n^2i+n^2+i^2+i}{(n^2+i)(n^2+i+1)}\right| \\
\leq&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\left|\left[\frac{2n^2i+n^2+i^2+i}{(n^2+i)(n^2+i+1)}\right]^2\right|} \\
\leq&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{Mn^3}{n^4}\right)^2} \\
=&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{M^2}{n^2}\right)} \\
\leq&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\sqrt{\left(\frac{M^2}{n}\right)} \\
=&\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m+2}}\right|\cdot\frac{M}{\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{n^{m-2}}\frac{1}{(n^2+i+1)(n^2+i)}\right)=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{n}{m+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}$$

证毕。

(法二) 拟合法

考虑

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m}=\frac{n}{m+1}+\frac{1}{2}+o(1)(n\to\infty)$$

因此

$$\frac{n}{m+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m}-\frac{1}{2}+o(1)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{n}{m+1}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m}+\frac{1}{2}+o(1)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{i^m}{n^m}\right)+\frac{1}{2}+o(1)\\
&=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+i\cdot n^{m-2})}+o(1)
\end{aligned}$$

考虑

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+n^{m-1})}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+i\cdot n^{m-2})}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^{m+2}}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^{m+2}}=\int_0^1 x^{m+1}dx=\frac{1}{m+2}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+n^{m-1})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^{m+2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=\frac{1}{m+2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{m+1}}{n^2(n^m+i\cdot n^{m-2})}=\frac{1}{m+2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^m}{n^m+i\cdot n^{m-2}}-\frac{n}{m+1}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}$$

证毕。

18 上下极限

定理 1 若数 a 的任一邻域都含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点。

推论 1 若数列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，且 $\lim_{k\to\infty}\{x_{n_k}\}=a$，则 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点。

定理 2 有界数列 $\{x_n\}$ 至少有一个聚点，且存在最大聚点与最小聚点。

定义 1 记有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点为 $\overline{A}$，称为数列 $\{x_n\}$ 的**上极限**；最小聚点为 $\underline{A}$, 称为数列 $\{x_n\}$ 的**下极限**。记作：

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \overline{A}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \underline{A}$$

推论 2 有界的数列必有上下极限。

定理 3 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 的上下极限都存在并且相等。即

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = A \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = A$$

因此，在某些求极限的题目中 (尤其是递推形式的数列极限问题)，如果我们已经知道数列有界了，那么就可以分别对递推式取上下极限，如果上下极限相等，那么原极限存在。

【例 18.1】设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是有界数列，且有:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b, a_{n+1} + 2a_n = b_n$$

证明 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。

证明：因为 $\{a_n\}$ 有界，故可设 $\overline{A}$ 和 $\underline{A}$ 分别为 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限。

由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

以及

$$a_{n+2} = b_{n+1} + 2(-a_{n+1})$$

$$-a_{n+1} = -b_n + 2a_n$$

那么有

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \varlimsup_{n\to\infty} a_n \\
&= \varlimsup_{n\to\infty} a_{n+2} \\
&= b + 2\varlimsup_{n\to\infty}(-a_{n+1}) \\
&= b + 2(-b + 2\varlimsup_{n\to\infty} a_n) \\
&= -b + 4\varlimsup_{n\to\infty} a_n \\
&= -b + 4\overline{A}
\end{aligned}$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{3}$$

同理可得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \frac{b}{3}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{3}$$

【例 18.2】设 $x_0, y_0 \in R$，对于 $n \geq 0$，定义:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \end{cases}$$

证明：(1)$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$;(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明：(1) 注意到 $x^2 + xy + y^2 \geq 0 (\forall x, y \in R)$ 显然 $x_n, y_n \in [0, 1] (\forall n \geq 1)$

对于 $n \geq 1$，有

$$\begin{aligned} & |x_{n+1} - y_{n+1}| \\ & = \left| \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} - \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \right| \\ & = \frac{(x_n + y_n)|x_n - y_n|}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \\ & \leq \frac{(x_n + y_n)|x_n - y_n|}{1 + 3x_n^2 + 2x_n y_n + 3y_n^2} \\ & \leq \frac{1}{2}|x_n - y_n| \end{aligned}$$

因此 $|x_n - y_n| \leq \frac{|x_1 - y_1|}{2^{n-1}} (n \geq 1)$. 因此 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

(2) 记 $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n, l = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ 显然 $0 \leq l \leq L \leq 1$ 由于

$$\begin{aligned} & (x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) \\ & = 3x_n^2 - x_n y_n - 2y_n^2 \\ & = 4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} [4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2)] = 0$$

那么

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4L^2$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4l^2$$

而

$$x_n^2+x_ny_n+2y_n^2=\frac{1}{x_{n+1}}-1$$

因此 $4L^2=\frac{1}{l}-1$,$4l^2=\frac{1}{L}-1$ 因此

$$4Ll^2+L=4L^2l+l=1$$

若 $L\neq l$，则 $4Ll=1$ 及 $L+l=1$，仍得到 $L=l=\frac{1}{2}$ 矛盾。因此 $L=l$, 从而数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【**例** 18.3】设 $\beta_n>0$，函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 有界，$[0,1]$ 黎曼可积，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

证明：首先我们引入一个定理：

定理 4 黎曼可积函数可以用连续函数逼近, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$，使得:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx\right|<\varepsilon$$

具体证明详见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/130394480

因此 $\forall\varepsilon>0$，存在 $f(x),g(x)$ 使得

$$h(x)\le f(x)\le g(x),\int_0^1 g(x)dx-\varepsilon\le\int_a^b f(x)dx\le\int_0^1 h(x)dx+\varepsilon$$

若 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，则在 $[0,1]$ 上一致连续，那么 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$$

以及

$$\varepsilon=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon$$

如果 $F(x)\in R[-2,1]$，则：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 g(x)dx\le\int_0^1 F(x)dx+\varepsilon$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 h(x)dx\ge\int_0^1 F(x)dx-\varepsilon$$

因此

$$\int_0^1 F(x)dx-\varepsilon\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\le\int_0^1 F(x)dx+\varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 F(x)dx$$

但是到此还没有结束，因为 f 是定义在 $[-2,1]$ 上的有界函数，但在 $[0,1]$ 上黎曼可积，因此 $\frac{k}{n}+\beta_n$ 的值可能超出 $[0,1]$, 因此我们还要考虑 $\frac{k}{n}+\beta_n<0$ 的情况，此时 $k\in[1,-n\beta_n]\cup[n(1-\beta_n),n]=S$ 那么

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in S}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\right|\le\sup_{x\in[1,2]}f(x)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2|n\beta_n|+1}{n}\to 0(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k,-2\le x<0}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=0$$

因此我们可以定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & \text{if } 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{if } -2\le x\le 1.\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k,0\le x\le 1}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k,0\le x\le 1}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k,-2\le x<0}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\end{aligned}$$

证毕。 □

19 分段估计

在某些含有定积分的极限题，例如

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(n,x)dx$$

我们经常看到答案的做法是拆分区间，而且是某些特定的点的某个邻域。下面我会举一些典型的例子说明如何找拆分的区间。

【例 19.1】求:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx$$

我们观察被积函数，发现当 $0<x<1$ 时，$x^n\to 0(n\to\infty)$ 。于是我们猜测在 $[0,1-\epsilon)$ 内的邻域内的积分值足够小以至于可以忽略（为 0)，而在 $[1-\epsilon,1]$ 这个区间内积分值占主要地位。那么我们自然的将积分分成两个区间。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon}x^n dx+\lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^1 x^n dx$$

由于 x^n 单调递增，那么对于第一项

$$\int_0^{1-\varepsilon} x^n dx \le \int_0^{1-\varepsilon} (1-\varepsilon)^n dx \le (1-\varepsilon)^n \to 0 (n \to 0)$$

对于第二项：

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} x^n dx \le \int_{1-\varepsilon}^{1} 1^n dx = \varepsilon$$

那么就证明了

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n dx = 0$$

上面这个例子是最平凡，最普通的例子。但是也反应出了该方法的本质，就是找“最值点”或者说“破坏点”，然后在该点的小邻域内进行分割区间，我们希望包含该点的积分与原积分同值（或者为 0），不包含该点的积分值为 0（或者与原积分同值）。总的来说“破坏点”大致分为两类：

定义 1 (破坏点)：
第一类：函数 $f(n,x)$ 在 $x=x_i$ 处对 n 取极限，极限值**不为 0**（可以是无穷大），在其它点的极限为 0；
第二类：函数 $f(n,x)$ 在 $x=x_i$ 处对 n 取极限，极限值**为 0**，在其它点的极限不为 0。

那么求极限时

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(n,x)dx$$

我们一般可以这样操作：
1. 我们找到若干个破坏点 $x_i \in [a,b]$
(1) 若 x_i 中有区间 $[a,b]$ 的某个端点，我们可以拆分成 $[a,a+\varepsilon]\bigcup[a+\varepsilon,b]$ 或 $[a,b-\varepsilon]\bigcup[b-\varepsilon,b]$；
(2) 若含有两个端点，我们可以拆分成 $[a,a+\varepsilon]\bigcup[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\bigcup[b-\varepsilon,b]$；
(3) 若含有开区间内的某个点 x_i，则拆分成 $[a,x_i-\varepsilon_i]\bigcup[x_i-\varepsilon_i,x_i+\varepsilon_i]\bigcup[x_i+\varepsilon_i,b]$.
2. 将含有破坏点的区间积分累加计算，将不含有破坏点的区间累加计算。
那么一般会有：
(1) 破坏点为全为第一类破坏点时 (下面式子没有加入端点，如果端点取到破坏点要加上端点):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{x_i-\varepsilon_i}^{x_i+\varepsilon_i} f(n,x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(n,x)dx$$

(2) 破坏点为全为第二类破坏点时 (下面式子没有加入端点，如果端点取到破坏点要加上端点):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{x_i-\varepsilon_i}^{x_i+\varepsilon_i} f(n,x)dx = 0$$

【例 19.2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积。$0 \le f(x) < 1, x \in [a,b), f(b) = 1$，求：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx$$

解：

$$\int_a^b f^n(x)dx = \int_a^{b-\varepsilon} f^n(x)dx + \int_{b-\varepsilon}^b f^n(x)dx$$

对于第一项，由积分中值定理，

$$\exists\, \xi \in (a, b-\varepsilon)\ s.t.$$

$$\int_a^{b-\varepsilon} f^n(x)dx \le f^n(\xi)(b-a) \to 0(n\to\infty)$$

对于第二项，有

$$\int_{b-\varepsilon}^b f^n(x)dx \le \int_{b-\varepsilon}^b 1^n dx = \varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx = 0$$

我们再举一些具体的例子：

【例 19.3】计算：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

对于第一项：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx \le \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \to 0(n\to\infty)$$

对于第二项：

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \le \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1^n dx = \varepsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

【例 19.4】$f(x) \in R[0,1]$ 在 $x=1$ 处连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$$

解：由于 f(x) 在 [0,1] 上黎曼可积，那么一定有界，设为 M, 且有

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^{1-\varepsilon} x^n f(x)dx + \int_{1-\varepsilon}^1 x^n f(x)dx$$

对于第一项，由积分中值定理，$\exists\, \xi \in (a, b-\varepsilon)\ s.t.$

$$|n\int_0^{1-\varepsilon} x^n f(x)dx| = n|\xi^n \int_0^{1-\varepsilon} f(x)dx| \le n(1-\varepsilon)^n \cdot sup|f(x)|$$

对于第二项，有

$$n\int_{1-\varepsilon}^{1} x^n f(x)dx = nf(\xi')\int_{1-\varepsilon}^{1} x^n dx = f(\xi')\left(\frac{n}{n+1} - n\frac{(1-\varepsilon)^n}{n+1}\right)$$

其中 $1-\varepsilon < \xi' < 1$. 我们的目标是让第一项趋于 0，第二项趋于 $f(1)$(因为 x^n 占主导地位，x=1 为最大值) 我们只需 $n(1-\varepsilon)^n \to 0(n \to \infty)$ 即可。我们取 $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$，那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n(1-\varepsilon)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} n(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n \\
&= \lim_{n\to\infty} ne^{nln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{nln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})+lnn} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n(-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))+lnn} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\sqrt{n}-\frac{1}{2}+lnn+o(1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n\int_{1-\varepsilon}^1 x^n f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} f(\xi')\left(\frac{n}{n+1} - n\frac{(1-\varepsilon)^n}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} f(\xi') \\
&= \lim_{\xi'\to 1} f(\xi') \\
&= f(1)
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$$

这个证明过程的方法不难想到，可以使用拆分区间去做，但是要找到合适的 $\varepsilon(n)$ 才能做出来。

【**例** 19.5】$f(x) \in C[0,1]$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

证明：我们只需证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

即可，那么由海涅归结原则，取数列 $x_n = \frac{1}{n} \to 0^+ (n \to +\infty)$, 那么就会有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\frac{1}{n}}{x^2+(\frac{1}{n})^2}f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

我们下面证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$$

我们发现当 x 趋于 0 时，被积函数取最大值（趋于无穷）。那么我们在 $x=0$ 的邻域内分割区间。那么：

$$\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \int_0^{\varepsilon} \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx$$

对于第一部分，应用积分中值定理：

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = f(\xi)\int_0^{\varepsilon} \frac{h}{x^2+h^2}dx = f(\xi)arctan(\frac{\varepsilon}{h})$$

对于第二部分:

$$\begin{aligned}
&|\int_{\varepsilon}^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx| \\
&\le max|f(x)||\int_{\varepsilon}^1 \frac{h}{x^2+h^2}dx| \\
&= M \cdot |arctan(\frac{1}{h}) - arctan(\frac{\varepsilon}{h})|
\end{aligned}$$

于是，我们需要找到一个 ε 使得

$$\lim_{h\to 0^+} arctan(\frac{\varepsilon}{h}) = \frac{\pi}{2}$$

事实上，只需取 $\varepsilon = \sqrt{h}$ 即可，那么就有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^{\varepsilon} \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} f(\xi)arctan(\frac{\varepsilon}{h}) = \frac{\pi}{2}f(0)$$

而且有

$$\lim_{h\to 0^+} M \cdot [arctan(\frac{1}{h}) - arctan(\frac{\varepsilon}{h})] = 0$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx \\
&=\lim_{h\to 0^+}\int_0^{\varepsilon} \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx+\lim_{h\to 0^+}\int_{\varepsilon}^1 \frac{h}{x^2+h^2}f(x)dx \\
&=\boxed{\frac{\pi}{2}f(0)}
\end{aligned}
$$

有时候，题目不一定让求的是极限，也有可能是比较大小等，也可以考虑分割区间。

【例 19.6】设：

$$
a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 dt
$$

证明 $\sum\frac{1}{a_n}$ 发散。证明：我们发现 $\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 \to n^3(t\to 0^+)$ 因为 n 可以取到无穷大，我们认为此处为“破坏点”（“最大值点”）。（其它点处该函数有界），因此考虑：

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 dt=\int_0^{\varepsilon} t\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 dt+\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 dt
$$

因为不是求极限，所以两段积分都可以放缩，但不会是 0。题目要证明 $\sum\frac{1}{a_n}$ 发散，我们只需要证明 $a_n<kn(k>0)$, 那么有 $\sum\frac{1}{a_n}>\sum\frac{1}{kn}$ 发散。

对于第一部分, 我们首先证明这样的事实

$$
|\sin nt|\le n|\sin t|
$$

我们使用数学归纳法证明：

1.$n=1$ 时显然成立；

2. 假设 $n\le k$ 成立；

那么 $n=k+1$ 时

$$
\begin{aligned}
&|\sin(k+1)x|=|\sin(kx+x)| \\
&=|\sin kx\cos x+\sin x\cos kx| \\
&\le|\sin kx\cos x|+|\sin x\cos kx| \\
&\le|\sin kx||\cos x|+|\sin x||\cos kx| \\
&\le|\sin kx|+|\sin x| \\
&\le k|\sin x|+|\sin x| \\
&=(k+1)|\sin x|
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int_0^{\varepsilon} t\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 dt\le n^3\int_0^{\varepsilon} tdx=\frac{\varepsilon^2n^3}{2}
$$

对于第二部分，由于 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$, 那么

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right|^3 dt \\
&\leq \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{1}{\sin(t)}\right|^3 dt \\
&\leq \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t\cdot(\frac{\pi}{2t})^3 dt \\
&= \frac{\pi^3}{8}(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{2}{\pi}) \\
&< \frac{\pi^3}{8\varepsilon}
\end{aligned}$$

因此，我们需要找到一个 ε，使得

$$\frac{\varepsilon^2 n^3}{2}+\frac{\pi^3}{8\varepsilon} < kn$$

即可。

这里我们选择 $\varepsilon=\frac{1}{n}$ ，那么有

$$\frac{\varepsilon^2 n^3}{2}+\frac{\pi^3}{8\varepsilon} < 10n$$

因此

$$\sum\frac{1}{a_n} > \frac{1}{10}\sum\frac{1}{n}$$

因此 $\sum\frac{1}{a_n}$ 发散。

【例 19.7**】**求：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx$$

解：当且仅当 $x\to 0$ 时，被积函数趋于 0，因此破坏点为 $x=0$, 那么

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx \\
&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
0\leq I_1 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 2x\cdot\arctan(n\frac{1}{\sqrt{n}})\cdot e^{x^2}dx \\
&= \arctan(\sqrt{n})(e^{\frac{1}{n}}-1)\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} 2x \cdot \arctan(nx) \cdot e^{x^2} dx \\
&= \arctan(n\xi) \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} 2x \cdot e^{x^2} dx \\
&= \arctan(n\xi)(e - e^{\frac{1}{n}}) \to \frac{\pi}{2}(e-1)(n \to \infty)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2x \cdot arctan(nx) \cdot e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(e-1)
$$

20 Arzela 控制收敛定理

上一节，我们使用了拆分区间，分段估计的方法计算形如 $\lim_{n\to} \int_a^b f_n(x)dx$ 的极限，于是我们自然会想，如果极限与积分能够交换顺序，那么先求内层极限，那么

$$
\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx
$$

就会更加方便计算。下面引入几个定义及定理，确保我们可以这样操作：

定义 1 (一致有界) 设 $\{f_n(x)\}$ 为函数列，若存在 $M > 0$，对任意的 n 和 $x \in D$，都有

$$
|f_n(x)| \le M
$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致有界。

定义 2 (逐点收敛) 设 $\{f_n(x)\}$ 为函数列，若对于任一 $x_0 \in D$，都有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$，即 $\forall x_0 \in D$(事先给定 x_0),$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$
|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon
$$

则称函数序列 $f_n(x)$ 逐点收敛于 $f(x)$。

定义 3 (一致收敛) 设 $\{f_n(x)\}$ 为函数列，若 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时, 对 $\forall x \in D$, 有

$$
|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon
$$

则称函数序列 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$。

定理 1 设 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $I=[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，且每一项都连续，那么：
1.$f(x)$ 在 I 上连续；
2.
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$
3.
$$\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

定理 2 (Arzela 控制收敛定理) 设 $\{f_n(x)\}(x\in D=[a,b])$ 为函数列，若满足：
1. 对任意 n,x，有 $f_n(x)$ 黎曼可积；
2.$\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致有界；
3.$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$(不要求一致收敛), 且 $f(x)$ 在 D 上黎曼可积.
那么有
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

【例 20.1】 求：
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx$$
解：由于
$$\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0 & \text{, if } 0\le x<1\\ 1 & \text{, if } x=1\end{cases}$$
因此
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} x^n dx+\lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^1 x^n dx=I_1+I_2$$
对于第一项
$$I_1=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} x^n dx=\int_0^{1-\varepsilon}\lim_{n\to\infty} x^n dx=0$$
对于第二项
$$I_2=\lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^1 x^n dx\le\lim_{n\to\infty}\int_{1-\varepsilon}^1 1^n dx=\varepsilon$$
因此
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=0$$
通过该题可以知道，如果 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 在端点处间断也不影响积分取值 (前提是可积)，因此以后这样的题就可以不需要考虑端点，拆分区间了。

【例 20.2】 求：
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}$$
解：
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{dt}{(1+t^4)^n}=\int_0^1 0dt=\boxed{0}$$

【例 20.3】求：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^a \frac{dx}{1+x^n}(a>1)$$

解：令 $t=\frac{1}{x}, dx=-\frac{1}{t^2}dt$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^a \frac{dx}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty} n\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{1+\frac{1}{t^n}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{nt^{n-2}}{1+t^n}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{nt^{n-1}}{t(1+t^n)}dt$$

因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{nt^{n-1}}{t(1+t^n)}dt\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{1}{t}d[\ln(1+t^n)]\\
&=\ln 2-\lim_{n\to\infty} a\ln\left(1+\frac{1}{a^n}\right)+\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}dt\\
&=\ln 2+\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}dt
\end{aligned}$$

当 $\frac{1}{a}\le t<1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+t^n)}{t^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{t^2}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{a}}^1 \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+t^n)}{t^2}dt=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^a \frac{dx}{1+x^n}=\boxed{\ln 2}$$

【例 20.4】求：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx\\
&=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} 2x\cdot\arctan(nx)\cdot e^{x^2}dx\\
&=\int_0^1 2x\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{x^2}dx\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2)\\
&=\boxed{\frac{\pi}{2}(e-1)}
\end{aligned}$$

21 Laplace 方法

求解形如 $\lim_{n\to}\int_a^b f_n(x)dx$ 的极限时，一种方法是找“最大值点”或者“破坏点”，然后人工拆分区间将“破坏点”分隔，然后分段计算每个极限。一种方法是使用 Arzela 控制收敛定理，将积分与极限交换顺序。其中，有一类形如

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx\ (*)$$

特殊的极限, 我们可以使用 Laplace 方法解决。

Laplace 方法是极限积分极限的一种有效方法，其本质是找“阶的集中点”，也即当 n 趋于无穷大时，到底哪一部分占“主导”。该定理主要解决形如上面类型的极限：

如果类似这样的积分极限:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(x)f^n(x)dx\ (f(x)>0)$$

我们令 $h(x)=\ln f(x)$ 即可转化为 $(*)$ 类型的极限。下面叙述 Laplace 方法的主要内容：

定理 1 (Laplace 方法)：设 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且：

（1）$\exists n_0\in N$, 对 $\forall n\geq n_0$，都有 $\varphi(x)e^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积；

（2）1. 存在唯一的点 $\xi\in(a,b)$，使得 $h(\xi)$ 为 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，2. 对于任何不含有 ξ 的闭区间 $[\alpha,\beta]$，即 $\xi\notin[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，都有 $sup_{x\in[\alpha,\beta]}h(x)<h(\xi)$；

（3）在 ξ 的一个小邻域内，$h''(x)$ 连续，$h''(\xi)<0$;

（4）$\varphi(x)$ 在 $x=\xi$ 连续，且 $\varphi(\xi)\neq 0$。

那么当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx\sim\varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}e^{nh(\xi)}$$

我们先解释一下这几条要求。

首先 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义是显然的，因为定积分中 x 的取值范围就是 $[a,b]$；

其次第（1）条所要求的是当 n 充分大后，$\varphi(x)e^{nh(x)}$ 可积，因为我们要求的是极限，所以可以不用考虑前面有限项；

第（2）1. 体现了分段估计的思想，但是要求 $h(x)$ 仅有一个最大值点且不在端点 2. 而第二点要求的存在是考虑到某些不连续的函数，虽然仅有一个不为端点的最大值，但存在第一类间断点的情况。例如

$$h(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq 1\\ -x+2, & 1<x\leq 2\\ x-2, & 2<x<3\\ 0, & x=3\\ -x+4, & 3<x\leq 4\end{cases}$$

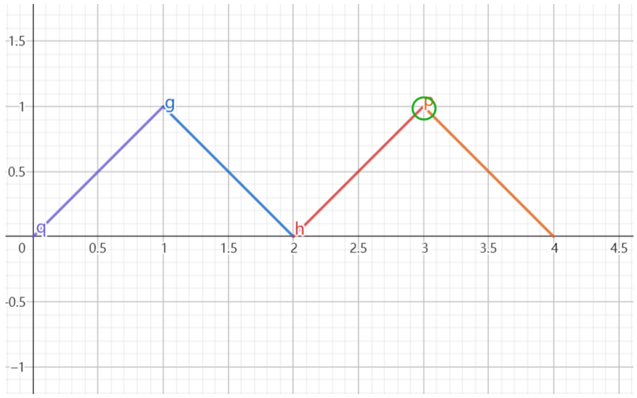

图 1: h(x) 图像

$h(x)$ 在 $[0,4]$ 仅有一个最大值点 $x=1$，但是在 $[2,4]$ 上有 $sup_{x\in[2,4]}h(x)=1$ 不满足第二点要求。第（3）和（4）的要求是为了让中间推导过程和结果有意义。

为了方便叙述，我们回顾一下 O 记号。其定义为：

若 $g(x)>0$，存在 $A>0$，使得

$$|f(x)|\leq Ag(x)\ (x\in D)$$

那么记 $f(x)=O(g(x))$。

性质：如果 $|f(x)|\leq O(g(x))$，那么 $f(x)=O(g(x))$

证明：由于 $|f(x)|\leq O(g(x))\leq Ag(x)$，因此 $f(x)=O(g(x))$

下面证明该定理：

证明：

首先，我们先确定一个 n_0。事实上，我们只需取 $n_0=0$ 即可，因为若 $n_0=0$ 时已证明，那么对于 $n\geq n_1\geq n_0=0$ 的 n，上述定理都成立。

我们首先将积分区间进行划分。因为 ξ 点为最大值点，因此我们将点 ξ 隔离开。

由于这和上次讨论的有些差别（上次的是求极限，这次的是证明等价，相当于求阶），因此我们需要将区间分割再精确一点，即阶在 ξ 点附近，那么我们如果讨论 $[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ 就会更方便一点。并且我们在证明过程中需要用到 $h(x)$ 的导数，所以我们需要多划分一个区间，以保证在该区间 $h(x)$ 可导（或者二阶可导）

因此我们选取一个较小的 $\delta>0$，使得 $h''(x)\leq -k<0(x\in[\xi-\delta,\xi+\delta])$(二阶可导且有上界)

我们计算

$$\int_a^b\varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx=\left(\int_a^{\xi-\delta}+\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}+\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}+\int_{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+\delta}+\int_{\xi+\delta}^{b}\right)\varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx$$

记每段积分分别为 $I_1,I_2,I_3,I_4,I_5.I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$(等会可以看到为什么这样分割区间)

记 $m'=sup_{x\in[a,\xi-\delta]}[h(x)-h(\xi)]<0$, 则

$$I_1=\int_a^{\xi-\delta}\varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx$$

那么 $e^{n[h(x)-h(\xi)]}\le 1\cdot e^{nm'}$，即 $e^{n[h(x)-h(\xi)]}=O(e^{nm'})$ 而 $\int_a^{\xi-\delta}\varphi(x)dx$ 有界，即 $\int_a^{\xi-\delta}\varphi(x)\le M$ 那么

$$I_1=O(e^{nm'})\int_a^{\xi-\delta}\varphi(x)dx=O(e^{nm'})\cdot O(1)=O(e^{nm'})$$

同理，若令 $m''=sup_{x\in[\xi+\delta,b]}[h(x)-h(\xi)]<0$ 那么 $I_5=O(e^{nm''})$

下面讨论 I_2，在 $[\xi-\delta,\xi-n^{-\frac{2}{5}}]$ 上 $h(x)$ 二阶可导，那么由于 $h(\xi)$ 为最大值且在 ξ 附近连续，因此 $h'(\xi)=0$。

$$h(x)=h(\xi)+\frac{h''(\eta)}{2}(x-\xi)^2,\eta=\xi+\theta(x-\xi),0<\theta<1$$

结合刚才规定 $h''(x)\le -k<0(x\in[\xi-\delta,\xi+\delta])$，那么我们有

$$h(x)-h(\xi)=\frac{h''(\eta)}{2}(x-\xi)^2\le-\frac{k}{2}(x-\xi)^2$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx\\&\le\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{-n\frac{k}{2}(x-\xi)^2}dx\\&\le\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{-n\frac{k}{2}n^{-\frac{4}{5}}}dx\\&=\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}}dx\\&=O\left(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}}\right)\end{aligned}$$

同理 $I_4=O(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}})$

下面估计 I_3.

由积分中值定理，得

$$I_3=\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx=\varphi(\xi_n)\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\varphi(\xi_n)=\varphi(\xi)$ 因此 $\varphi(\xi_n)=\varphi(\xi)+\varphi(\xi)\cdot o(1)=\varphi(\xi)(1+o(1))$ 因此

$$I_3=\varphi(\xi)(1+o(1))\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx$$

记 $S=[\xi-n^{-\frac{2}{5}},\xi+n^{-\frac{2}{5}}]$

$$a=min_{x\in S}h''(x),A=max_{x\in S}h''(x)$$

那么

$$a=h''(\xi)(1+o(1)),A=h''(\xi)(1+o(1))$$

由于

$$\frac{a}{2}(x-\xi)^2 \le h(x)-h(\xi)=\frac{h''(\eta)}{2}(x-\xi)^2 \le \frac{A}{2}(x-\xi)^2$$

那么

$$\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}} e^{n\frac{a}{2}(x-\xi)^2}dx \le \int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}} e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx \le \int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}} e^{n\frac{A}{2}(x-\xi)^2}dx$$

计算左边积分，作换元 $-\frac{1}{2}na(x-\xi)^2=y^2, dx=\sqrt{-\frac{2}{na}}dy$ 因此

$$\begin{aligned}
I_{left} &= \int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}} e^{n\frac{a}{2}(x-\xi)^2}dx \\
&= \int_{-\sqrt{-\frac{a}{2}}\cdot n^{\frac{1}{10}}}^{\sqrt{-\frac{a}{2}}\cdot n^{\frac{1}{10}}} e^{-y^2}\sqrt{-\frac{2}{na}}dy \\
&= \sqrt{-\frac{2}{na}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\sqrt{-\frac{a}{2}}\cdot n^{\frac{1}{10}}}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{a}{2}}\cdot n^{\frac{1}{10}}}\right)e^{-y^2}dy
\end{aligned}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$$

当 n 充分大时，后两项趋于 0，因此

$$\left(-\int_{\sqrt{-\frac{a}{2}}\cdot n^{\frac{1}{10}}}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{a}{2}}\cdot n^{\frac{1}{10}}}\right)e^{-y^2}dy=o(1)=o(1)\cdot\sqrt{\pi}$$

那么

$$I_{left}=\sqrt{-\frac{2}{na}}(1+o(1))\sqrt{\pi}=\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)),(n\to\infty)$$

同理

$$I_{right}=\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)),n\to\infty$$

因此

$$I_3=\varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)),n\to\infty$$

那么

$$I=\int_a^b \varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx=\varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1))+O(e^{nm'})+O(e^{nm''})+O(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}})$$

由于 $m',m''<0$，因此 $O(e^{nm'})+O(e^{nm''})+O(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}})\to 0(n\to\infty)$

那么

$$\int_a^b \varphi(x)e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx=\varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}\ (1+o(1))(n\to\infty)$$

两边同时乘以 $e^{h(\xi)}$ 即得

$$\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx \sim \varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}e^{nh(\xi)}(n\to\infty)$$

这样，我们就证明了这个定理。

注：若 a 或 b 为 ∞，只需 $\varphi(x)e^{nh(x)}(n\geq n_0)$ 在无穷区间可积即可。

我们用这个定理推导 **Stirling 公式**。

【**例** 21.1】证明:

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n \ (n \ \to\infty)$$

证明：考虑

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty y^n e^{-y}dy = n^{n+1}\int_0^\infty (xe^{-x})^n dx (\text{y=nx 代换})$$

那么可以取

$$a=0, b=+\infty, \varphi(x)=1, h(x)=lnx-x, \xi=1$$

因此

$$n! \sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n \ (n \ \to\infty)$$

但在实际问题中，我们经常遇到最大值在端点的情况。我们需要稍加修改一下条件和结论即可。下面给出两个定理，解决最大值在端点的情况。我们只考虑在左端点 $x=a$ 的情况，最大值在右端点时通过变量代换即可换成左端点。

定理 2

设 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且：

（1）$\exists n_0\in N$, 对 $\forall n\geq n_0$，都有 $\varphi(x)e^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积；

（2）1. $h(a)$ 为 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，2. 对于任何不含有 a 的闭区间 $[\alpha,\beta]$ ，都有 $sup_{x\in[\alpha,\beta]}h(x)<h(a)$ ；

（3）在 a 的某个右邻域内，$h''(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都连续；

（4）$h'(a)=0, h''(a)<0$ ，且 $\varphi(a)\neq 0$ 。

那么当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx \sim \varphi(a)\sqrt{-\frac{\pi}{2nh''(a)}}e^{nh(a)}$$

有时可能不满足 $h'(a)=0$，那么有下面定理：

定理 3

设 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且：

（1）$\exists n_0 \in N$, 对 $\forall n \geq n_0$，都有 $\varphi(x)e^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积；

（2）1. $h(a)$ 为 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，2. 对于任何不含有 a 的闭区间 $[\alpha,\beta]$ ，都有 $sup_{x\in[\alpha,\beta]}h(x)<h(a)$ ；

（3）在 a 的某个右邻域内，$h'(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都连续；

（4）$h'(a)<0$ 且 $\varphi(a)\neq 0$ 。

那么当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx \sim -\frac{\varphi(a)}{nh'(a)}e^{nh(a)}$$

【例 21.2】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx$$

解：令 $t=1-x$ ，则 $dx=-dt$，因此

$$\int_0^1 x^n dx=\int_0^1 (1-t)^n dt=\int_0^1 (1-x)^n dx$$

令

$$\varphi(x)=1, h(x)=ln(1-x), \xi=a=0, h(0)=0, h'(0)=-1<0$$

那么使用定理 3，立马得到

$$\int_0^1 (1-x)^n dx \sim \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\boxed{0}$$

【例 21.3】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

解：令 $t=\frac{\pi}{2}-x$ ，则 $dx=-dt$，因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

令

$$\varphi(x)=1, h(x)=\ln(\cos x), \xi=a=0, h(0)=0, h'(0)=0, h''(0)=-1<0$$

那么使用定理 2，立马得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad (n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx=\boxed{0}$$

【例 21.4】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{cosx}{(1+x^2)^n}dx$$

解：令

$$a=0,b=\infty,\varphi(x)=cosx,h(x)=-ln(1+x^2),\xi=a=0,h'(a)=0,h''(a)=-2$$

那么使用定理 2，立马得到

$$\int_0^{\infty}\frac{cosx}{(1+x^2)^n}dx\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\quad(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{cosx}{(1+x^2)^n}dx=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

【例 21.5】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{1}\left(\frac{sinx}{x}\right)^n dx$$

解：令

$$a=0,b=1,\varphi(x)=1,h(x)=ln(\frac{sinx}{x}),\xi=a=0,h'(a+0)=0,h''(a+0)=-\frac{1}{3}$$

由于在 $x=0$ 点没有定义，这里用该点的右极限代替，仍可使用定理 2，得到:

$$\int_0^{1}(\frac{sinx}{x})^n dx\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\pi}{n}}\quad(n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{1}(\frac{sinx}{x})^n dx=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\pi}{n}}=\boxed{\frac{\sqrt{6\pi}}{2}}$$

【例 21.6】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}$$

解：由于 Laplace 方法只能解决含有积分的极限，这道题只有极限，但没有积分，所以我们需要构造出来积分。观察分子，其实就是 e^n 泰勒展开，展开到 n 次。于是我们自然想到使用带有积分余项的泰勒公式。即：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

先取 $f(x)=e^x$，那么

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{x^k}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^n dt$$

代入 $x=n$，得

$$e^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n dt$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n dt}{e^n}\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{\int_0^n e^t(n-t)^n dt}{e^n}\end{aligned}$$

我们考虑

$$\int_0^n e^t(n-t)^n dt$$

令 $t=nx,dt=ndx$，那么

$$\int_0^n e^t(n-t)^n dt=n^{n+1}\int_0^1 e^{nx}(1-x)^n dx=n^{n+1}\int_0^1 e^{n[x+ln(1-x)]}dx$$

取

$$a=0,b=1,\varphi(x)=1,h(x)=x+ln(1-x),\xi=a=0,h'(a)=0,h''(a)=-1$$

那么由定理 2，得

$$\int_0^1 e^{n[x+ln(1-x)]}dx\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}(n\to\infty)$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{\int_0^n e^t(n-t)^n dt}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!\cdot e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

由 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n$ $(n\to\infty)$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!\cdot e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{\sqrt{2n\pi}\cdot(\frac{n}{e})^n\cdot e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}=1-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

【例 21.7】令 $f(x)=1-x^2+x^3$ 计算下面极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx}$$

解：这道题我们发现“$h(x)$”在积分区间内有两个最大值点 $x=0,x=1$，因此我们需要拆分区间，可以将区间拆分为 $[0,1]=[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1]$, 于是:

$$\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} f^n(x)\ln(x+2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f^n(x)\ln(x+2)dx=I_1+I_2$$

对于 I_1：取

$$a=0,b=\frac{1}{2},\varphi(x)=\ln(x+2),h(x)=\ln(1-x^2+x^3),\xi=a=0,h'(0)=0,h''(0)=$$

因此，由定理 2，我们得到

$$I_1 \sim \ln 2\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

对于 I_2, 令 $t=1-x$ ，那么

$$I_2=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t+2t^2-t^3)^n\ln(3-t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x+2x^2-x^3)^n\ln(3-x)dx$$

取

$$a=0,b=\frac{1}{2},\varphi(x)=\ln(3-x),h(x)=\ln(1-x+2x^2-x^3),\xi=a=0,h'(0)=-1$$

因此，由定理 3，我们得到

$$I_2\sim\frac{\ln 3}{n}=o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

同理，对于

$$\int_0^1 f^n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}f^n(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f^n(x)dx=I_3+I_4$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2\sqrt{\frac{\pi}{4n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})}=\boxed{\ln 2}$$

22 黎曼引理

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 且在 $[0,T]$ 上可积，则有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx$$

【例 22.1】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^2|\sin nx|}{1+x^2}dx$$

解：令

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2},g(x)=|\sin x|,T=\pi$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^2|\sin nx|}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin x|dx\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\boxed{\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}}$$

【例 22.2】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin(nx)+\cos(nx)|}{x}dx$$

解：令

$$f(x)=\frac{1}{x},g(x)=|\sin x+\cos x|,T=\pi$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin(nx)+\cos(nx)|}{x}dx=\frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx\int_0^\pi|\sin x+\cos x|dx=\boxed{\frac{2\sqrt{2}\ln 2}{\pi}}$$

【例 22.3】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{1+x^2}dx$$

解：令

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},g(x)=\sin^2 x,T=\pi$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin^2(nx)}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\int_0^\pi \sin^2 xdx=\boxed{\frac{\pi}{8}}$$

【例 22.4】已知 $\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}$ 证明狄利克雷积分:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

证明：考虑

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right)\sin(nx)\,dx$$

令

$$f(x)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x},g(x)=\sin x,T=2\pi$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin xdx\int_0^\pi\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx=0$$

由于

$$\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

换元 $t=nx,dx=\frac{1}{n}dt$ 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

23 特殊函数

在某些含积分的极限 (尤其是求反常积分) 时，有时会碰到几类特殊的反常积分，如果我们熟知这些结论，就能够很容易地求出结果。

23.1 Γ 函数

Γ 函数 (Gamma 函数) 是特殊函数中最基本，也是最重要的一个函数，许多特殊函数均可用它的组合表示。因此 Γ 函数的用处也非常多。

定义 1

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$$

定理 1　递推公式:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

余元公式:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

定理 2　(极限定义)

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

定理 3　(无穷乘积定义)

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right\}$$

推论 1

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

【例 23.1.1】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>1)$$

(法一) 由 Γ 函数的极限定义，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^a}=\Gamma(a)\cdot 0=\boxed{0}$$

(法二) 由于 $a>1$，因此一定存在正整数 b，使得 $1\leq b\leq a<b+1$，因此:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n+b+1)!}(b+1)! &= \frac{n!}{(b+2)(b+3)\cdots(b+n+1)}\\ &\leq \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\\ &\leq \frac{n!}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}=\frac{n!}{(n+b)!}b!\end{aligned}$$

由于 $b \geq 1$，那么

$$0 \leq \frac{n!}{(n+b+1)!}(b+1)! \leq \frac{(b+1)!}{n+1}$$

$$0 \leq \frac{n!}{(n+b)!}b! \leq \frac{b!}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+b+1)!}(b+1)! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+b)!}b! = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \boxed{0}$$

【例 23.1.2】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

因此只需计算

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x\Gamma(x)}{x}$$

即可，那么由海涅归结原则可得原极限。由于

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x\Gamma(x)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\Gamma(x+1)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\Gamma'(x+1)}{1}\\
&=-\Gamma'(1)
\end{aligned}$$

下面求 $\Gamma'(1)$ 由于

$$\Gamma'(z) = \frac{d}{dz}\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial z}x^{z-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\ln x dx$$

令 $z=1$, 则

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x}\ln x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx}_{I_2}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 e^{-x}\ln x dx\\ &= -\int_0^1 \ln x d(e^{-x}-1)\\ &= -(e^{-x}-1)\ln x|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx\end{aligned}$$

又因为

$$-(e^{-x}-1)\ln x|_0^1 = \lim_{x\to 0}(e^{-x}-1)\ln x = \lim_{x\to 0}(-x)\ln x = 0$$

因此 $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx$ 同理

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx\\ &= -\int_1^{+\infty} \ln x d(e^{-x})\\ &= -(e^{-x})\ln x|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx\end{aligned}$$

因此 $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$ 那么

$$\Gamma'(1) = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

由Arzela 控制收敛定理，以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

那么

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}dx$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx = \int_1^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{n} \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx$$

因此

$$\begin{aligned}&\Gamma'(1)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}dx + \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}dx + \int_1^n \frac{1}{x}dx\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}dx}_{I_3} + \ln n\right)\end{aligned}$$

对于 I_3，作换元 $t=1-\frac{x}{n}, dx=-ndt$ 因此

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt \\
&= -\int_0^1 \left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right)dt \\
&= -\int_0^1 \sum_{k=1}^n t^{k-1}dt \\
&= -\sum_{k=1}^n \int_0^1 t^{k-1}dt \\
&= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

那么

$$\Gamma'(1)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)=-\gamma$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\Gamma'(1)=\boxed{\gamma}$$

【例 23.1.3**】**计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\Gamma(\frac{1}{1})\Gamma(\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{n})}}{n}$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\Gamma(\frac{1}{1})\Gamma(\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{n})}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\Gamma(\frac{1}{1})\Gamma(\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{n})}{n^n}}$$

我们知道，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 那么 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

令

$$x_n=\frac{\Gamma(\frac{1}{1})\Gamma(\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{n})}{n^n}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n+1}=\lim_{x\to0}x\Gamma(x)=\lim_{x\to0}\Gamma(x+1)=1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\Gamma(\frac{1}{1})\Gamma(\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\frac{1}{n})}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\boxed{\frac{1}{e}}$$

【例 23.1.4】计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

解：由余元公式，得：

$$\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}\\
&=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)}\\
&=\boxed{1}
\end{aligned}$$

【例 23.1.5】证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)-\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]=1$$

证明：由余元公式，得

$$\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)-\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\pi\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\sin\frac{\pi}{n+2}}-\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{n+1}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\pi\left[\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{n+1}-\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\sin\frac{\pi}{n+2}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\sin\frac{\pi}{n+2}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{n+1}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\pi\left[\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{n+1}-\Gamma\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\sin\frac{\pi}{n+2}}{\frac{\pi}{n+2}\cdot\frac{\pi}{n+1}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\pi}\cdot\left[\pi\frac{\cos\frac{\pi}{\xi}\Gamma\left(1-\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2}-\frac{\sin\frac{\pi}{\xi}\Gamma'\left(1-\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2}\right](n+1<\xi<n+2)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\xi^2}\cos\frac{\pi}{\xi}\Gamma\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\\
&=1
\end{aligned}
$$

【例 23.1.6】计算:

$$
\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}-\sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right]
$$

解：记

$$
a_n=\sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\sim\frac{n}{e}(n\to\infty)
$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}-\sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln a_{n+1}}-e^{\ln a_n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}a_n\left(e^{\ln a_{n+1}-\ln a_n}-1\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}\left(e^{\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}\right)\\
&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\frac{1}{n}}\\
&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

合并分子

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\dfrac{1}{n}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)+\ln\frac{1}{n+1}\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)+n\ln\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n+1}
\end{aligned}
$$

运用 Stolz 定理，得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)+n\ln\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n+1}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\Gamma\left(\dfrac{1}{n+1}\right)+(n+1)\ln\Gamma\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-n\ln\Gamma\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}{1}\\
=&\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}-1+1\right)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}=1
$$

利用等价无穷小，得：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}-1+1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-\Gamma\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}\\&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-\Gamma\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\Gamma\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}\\&=1\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}-\sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right]\\&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln\Gamma\left(\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\Gamma\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\frac{1}{n}}\\&=\boxed{\frac{1}{e}}\end{aligned}$$

23.2 B 函数

B 函数 (Beta 函数) 是另一个特殊函数，也是非常重要的一个函数，它可以用 Γ 函数表示。

定理 4

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx(p,q>0)$$

定理 5

$$B(p,q)=B(q,p)$$
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

推论 2

$$B(x,1-x)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

推论 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x dx = \frac{1}{2} B(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

证明：令 $t = \sin x$ 则 $x = \arcsin t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, 因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x dx = \int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t^2)^{\frac{b}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

【例 23.2.1】计算:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

其中 $a_n = \int_0^1 x(1-x^3)^n dx$

解：(法一)：做代换 $t = x^3, dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$

因此：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x(1-x^3)^n dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t)^n dt \\
&= \frac{1}{3} B(\frac{2}{3}, n+1) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)} \\
&= \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n!}{(n+\frac{2}{3})(n-\frac{1}{3}) \cdots \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{3^n n!}{(3n+2)(3n-1) \cdots 2}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(3n+5)(3n+2) \cdots 2} \cdot \frac{(3n+2)(3n-1) \cdots 2}{3^n n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{3n+5} \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

(法二)：一直分部积分：

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x(1-x^3)^n dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^3)^n d(x^2) \\
&= \frac{3n}{2}\int_0^1 x^4(1-x^3)^{n-1} dx \\
&= \frac{3n}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 (1-x^3)^{n-1} d(x^5) \\
&= \frac{3n}{2}\cdot\frac{3(n-1)}{5}\int_0^1 x^7(1-x^3)^{n-2} dx \\
&= \cdots \\
&= \frac{3n}{2}\cdot\frac{3(n-1)}{5}\cdots\frac{3}{3n-1}\int_0^1 x^{3n+1} dx \\
&= \frac{3n}{2}\cdot\frac{3(n-1)}{5}\cdots\frac{3}{3n-1}\frac{1}{3n+2} \\
&= \frac{3^n n!}{(3n+2)(3n-1)\cdots 2}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(3n+5)(3n+2)\cdots 2}\cdot\frac{(3n+2)(3n-1)\cdots 2}{3^n n!} \\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{3n+5} \\
=&\boxed{1}
\end{aligned}
$$

【例 23.2.2】计算:

$$
I_n = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln^n x - n\int_0^x \frac{\ln^{n-1} t}{\sqrt{1+t^2}} dt\right)
$$

解：

$$
\begin{aligned}
I_n &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln^n x - n\int_0^x \frac{\ln^{n-1} t}{\sqrt{1+t^2}} dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln^n x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} d(\ln^n t)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln^n x - \frac{x\ln^n x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^x \frac{\ln^n t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)\ln^n x}{\sqrt{1+x^2}} + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\ln^n t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{(\sqrt{1+x^2}+x)\sqrt{1+x^2}} + \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt
\end{aligned}
$$

考虑 Beta 函数：

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

令 $x=\frac{t^2}{1+t^2}(t\geq 0)$, 则 $dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$ 那么

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{q-1}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{p+q}}dt$$

令 $p+q=\frac{3}{2}$，则

$$B\left(p,\frac{3}{2}-p\right)=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$$

两边对 p 求 n 阶导，那么

$$B_n=B^{(n)}\left(p,\frac{3}{2}-p\right)=2^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p-1}\ln^n t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt=\lim_{p\to\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt=\lim_{p\to\frac{1}{2}}\frac{B_n}{2^{n+1}}=\frac{B^{(n)}\left(p,\frac{3}{2}-p\right)}{2^{n+1}}$$

23.3 ψ 函数

ψ 函数 (DiGamma 函数) 是 $\ln\Gamma(x)$ 求导所得的函数，也是非常重要的一个函数，它和调和级数有着密切的关系。

定义 2

$$\psi(x)=(\ln\Gamma(x))'=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

根据 Γ 函数的无穷乘积定义 $\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right\}$ 那么

$$\ln\Gamma(x)=-\gamma x-\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]=-\gamma x-\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{k}-\ln(k+x)+\ln x\right]$$

两边同时求导，得

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right]$$

因此可得推论：

推论 4

$$\psi(x)=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+x}\right]$$

代入 $x=1$, 因此 $\psi(1)=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma'(1)=-\gamma$

推论 5

$$\psi(x)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt$$

证明：

$$\begin{aligned}\psi(x)&=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+x}\right]\\&=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}-\frac{t^{k+x}}{k+x}\right]\Bigg|_0^1\\&=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left(t^k-t^{k+x-1}\right)dt\\&=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 t^k\left(1-t^{x-1}\right)dt\\&=-\gamma+\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}t^k\left(1-t^{x-1}\right)dt\\&=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt\end{aligned}$$

推论 6

$$\psi(x+n)-\psi(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}$$

【例 23.3.1】 已知 $\psi(\frac{1}{3})=-\gamma-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3,\psi(\frac{2}{3})=-\gamma+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$ 计算:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$$

解：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}=\frac{1}{6(k+\frac{1}{3})}-\frac{1}{3(k+\frac{2}{3})}+\frac{1}{6(k+1)}$$

而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}=\psi(x+n)-\psi(x)$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6(k+\frac{1}{3})}-\frac{1}{3(k+\frac{2}{3})}+\frac{1}{6(k+1)}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\psi(n)-\psi(\frac{1}{3})}{6}-\frac{\psi(n)-\psi(\frac{2}{3})}{3}+\frac{\psi(n)-\psi(1)}{6}\right]\\
&=\frac{-\psi(\frac{1}{3})+2\psi(\frac{2}{3})-\psi(1)}{6}\\
&=\boxed{\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-\frac{3}{4}\ln 3}
\end{aligned}
$$

【例 23.3.2】计算:

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2}-(n-1)\left(\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx\right)\right]
$$

解：令 $y=x^4$ 那么

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{y^{\frac{n-3}{4}}}{1+\sqrt{y}}dy\\
&=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{y^{\frac{n-3}{4}}-y^{\frac{n-1}{4}}}{1-y}dy\\
&=\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(\frac{1-y^{\frac{n-3}{4}}}{1-y}-\frac{1-y^{\frac{n-1}{4}}}{1-y}\right)dy\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[\psi\left(\frac{n+3}{4}\right)-\psi\left(\frac{n+1}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

令 $t=1-x, q=t-\frac{t^2}{t}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{t^2-2t+2}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(t-\frac{t^2}{t}\right)}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-q}\\
&=\frac{1}{2}\left(1+q+q^2+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\left((1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)+\left((1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)^2+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

因此:

$$
\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\left[1+\left((1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)+\left((1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)^2+\cdots\right]dx
$$

考虑 Beta 函数

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m = B(n+1,m+1) = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right]$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2} - (n-1)\left(\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{2} - (n-1)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1} - \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} + \cdots\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

23.4 ζ 函数

定义 3

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

推论 7

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$$

【例 23.4.1】 设 $s \geq 0$, 求 $\varphi(1), \varphi(2)$:

其中

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)}dx$$

令 $t = x^2, dt = 2xdx$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+st)}{t(1+t)}dt$$

对于 $s = 1$

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt$$

考虑

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$$

令 $t = \ln(1+x)$ 则

$$\zeta(2) = \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt = 2\varphi(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

因此

$$\varphi(1)=\boxed{\frac{\pi^2}{12}}$$

对于 $s=2$

$$\begin{aligned}
\varphi(2)&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+2t)}{t(1+t)}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(2+t)}dt\quad(2t\to t)\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}\left(\frac{t+1}{t+2}\right)dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}\left(1-\frac{1}{t+2}\right)dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt-\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)(t+2)}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt-\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt-\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(t+2)(1+t)}dt\right]\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)(t+2)}dt
\end{aligned}$$

而

$$\varphi(1)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt=\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt=\frac{\pi^2}{12}$$

因此只需计算 $\int_0^{+\infty}\frac{ln(1+t)}{(1+t)(t+2)}dt$ 即可，而

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)(t+2)}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)}dt-\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(t+2)}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)}dt-\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(t+1)}dt\\
&=\int_0^{1}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{(t+1)}dt
\end{aligned}$$

而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{(t+1)}dt=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x(x+1)}dx\ (x=\frac{1}{t})=\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t(t+1)}dt$$

那么

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{(t+1)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{(1+t)}dt + \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(t+1)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{(t+1)\ln(1+t)}{t(t+1)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

因此

$$\varphi(2) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

24 傅里叶级数

满足一定条件的周期函数可以展开成傅里叶级数，傅里叶级数在求无穷级数的收敛值时非常有用。

定理 1 (狄利克雷条件) 设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期，在 $[-l.l]$ 满足：
(1) 连续或只有有限个第一类间断点;
(2) 只有有限个极值点.
则 $f(x)$ 可展开为傅里叶级数

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

记作 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$
则当 x 为 $f(x)$ 连续点时，$S(x) = f(x)$；当 x 为 $f(x)$ 间断点时，$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

推论 1 设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期, 且满足狄利克雷条件，则：

(1) 当 $f(x)$ 为偶函数时

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, b_n = 0$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

对于简单的幂函数 $f(x) = x^a(a = 2k, k \in N)$, 将它展开成傅里叶级数，通过递推，我们可以得到无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a}$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 的收敛值。

【例 24.1】 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛值

解：将 $f(x) = x^2$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅里叶级数，那么：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx = 4\frac{(-1)^n}{n^2}, a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, b_n = 0$$

因此

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

令 $x = 0$，则

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}}$$

令 $x = \pi$，则

$$-\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{n^2} = 0$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

【例 24.2】求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

解：将 $f(x)=x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数，那么：

$$a_n=0,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx=2\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

因此

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\sin(n\pi)+2\frac{(-1)^{2n-2}}{2n-1}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

25 伯努利数

定义 1 (递推定义) 令

$$\delta_{m,0}=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m\neq 0\end{cases}$$

那么

$$B_m=\delta_{m,0}-\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{B_k}{m-k+1}$$

定义 2 (生成函数) 对于数列 $\{a_n\}$，记

$$G(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为数列 $\{a_n\}$ 的生成函数。

定义 3 伯努利数是由生成函数 $\frac{x}{e^x-1}$ 定义的，其中

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$$

因此将 $\frac{x}{e^x-1}$ 泰勒展开即可求得 B_n

$$B_n=\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

定义 4 (伯努利多项式) 即如下形式的多项式为伯努利多项式：

$$B_k(n)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i n^{k-i}$$

(等幂求和) 有了伯努利多项式，那么就可以计算

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{B_{p+1}(n)-B_{p+1}}{p+1}=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{(k+1)!}B_{k+1}n^{p-k}$$

【例 25.1】计算：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}(k\in N)$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{1}{2}n^k+o(n^k)}{n^{k+1}}\\&=\boxed{\frac{1}{k+1}}\end{aligned}$$

【例 25.2】计算：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)(k\in N)$$

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{1}{2}n^k+o(n^k)}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(n^k)}{n^k}\right)\\&=\boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

26 Euler-Maclaurin 求和公式

Euler-Maclaurin 求和公式，简称 EM 公式。其将求和与积分联系起来。

定理 1

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \int_0^n f(x)dx + \frac{f(n)-f(0)}{2} + \int_0^n \psi(x)f'(x)dx \\
&= \int_1^n f(x)dx + \frac{f(n)+f(1)}{2} + \int_1^n \psi(x)f'(x)dx
\end{aligned}
$$

其中 $\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$

定理 2 (一般形式的 EM 公式) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有直到 $2n-1$ 阶连续导数，给出欧拉-麦克劳林公式：

$$
\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\left[f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)\right]
$$

其中 B_n 为伯努利数。

【**例** 26.1】证明：

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\sqrt{k} = 0
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\sqrt{k} \\
&= \frac{\cos 1 + \cos\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n}\int_1^n \cos\sqrt{x}dx + \frac{1}{n}\int_1^n \psi(x)f'(x)dx \\
&= \frac{\cos 1 + \cos\sqrt{n}}{n} + \frac{2\cos\sqrt{n} + 2\sqrt{n}\sin\sqrt{n} - 2\sin 1 - 2\cos 1}{n} + \frac{1}{n}\int_1^n \psi(x)f'(x)dx
\end{aligned}
$$

前两项的极限均为 0，因此只需要考虑最后一项的极限。$f'(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ 因此

$$
\left|\frac{1}{n}\int_1^n \psi(x)f'(x)dx\right| \le \frac{1}{n}\left|\int_1^n \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx\right| \le \frac{1}{n}\left|\int_1^n \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right| = \frac{\sqrt{n}-1}{n} \to 0(n\to 0)
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\sqrt{k} = 0
$$

27 加边问题

数列极限的加边问题本质上是求数列 a_n 渐进展开后各项的系数。通俗来说，如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，那么 a_n 可以写成如下形式：

$$a_n = a + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \cdots + \frac{A_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

因此我们可能会碰到类似求 $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a)$,$\lim_{n\to\infty} n\left[n(a_n - a) - A_1\right]$ 甚至

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\cdots n\left[n\left[n(a_n - a) - A_1\right] - A_2\right]\cdots - A_k\right]$$

之类的问题。这种问题的解决方法较多，可以使用高阶的 EM 公式或者泰勒公式，代入化简计算，也可以使用 stolz 定理或者其他方法。

在此之前，我们先证明定积分定义中提到的一个结论。

【例 27.1】 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $p+1$ 阶导函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n^p \left\{\left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \frac{(b-a)^{k+1}}{k!\cdot(k+1)n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(x_i)\right] - \int_a^b f(x)dx\right\} = \frac{(-1)^{p+1}(b-a)^p}{(p+1)!}\left[f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)\right]$$

其中 $x_i = a + i\frac{b-a}{n}(i = 1,2\cdots n)$ 证明：将区间 $[a,b]$ 中插入 $n-1$ 个点

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}(i = 1,2\cdots n)$$

记 I_i 为每段区间：

$$I_i = \left[a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}\right)(i = 1,2\cdots n)$$

将 $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ 在 x_i 处使用含有拉格朗日余项的泰勒公式展开到 p 阶，那么一定存在

$$\xi_i \in \left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}\right)(i = 1,2\cdots n)$$

使得：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k + \frac{f^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}(x - x_i)^{p+1}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $p+1$ 阶导数，则 $\exists M = max|f^{(p+1)}([a,b])|$。注意到：

$$\left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \frac{(b-a)^{k+1}}{k!\cdot(k+1)n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} n^p \left[\int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k dx\right]$$

考虑

$$\left| n^p \left\{\left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \cdot \frac{(b-a)^{k+1}}{k!\cdot(k+1)n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(x_i)\right] - \int_a^b f(x)dx\right\} + \sum_{i=1}^{n} n^p \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \frac{f^{(p)}(x_i)}{p!}(x - x_i)^p dx\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} n^p \left[\int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k - f(x)dx\right]\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} n^p \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \frac{f^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}(x - x_i)^{p+1} dx\right|$$

而 $|f^{(p+1)}(\xi_i)| \leq M$，那么

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n} n^p \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \frac{f^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}(x-x_i)^{p+1}dx\right| \\
&\leq \frac{M}{(p+1)!}\left|\sum_{i=1}^{n} n^p \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} (x-x_i)^{p+1}dx\right| \\
&= \frac{M}{(p+2)!}\sum_{i=1}^{n} n^p (x-x_i)^{p+2}\Big|_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \\
&= \frac{M(b-a)^{p+2}}{(p+2)!\cdot n} \to 0(n\to\infty)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^p\left\{\left[\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\cdot\frac{(b-a)^{k+1}}{k!\cdot(k+1)n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(x_i)\right]-\int_a^b f(x)\,dx\right\} \\
&= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} n^p \int_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \frac{f^{(p)}(x_i)}{p!}(x-x_i)^p\,dx \\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(p+1)!}\sum_{i=1}^{n} n^p f^{(p)}(x_i)(x-x_i)^{p+1}\Big|_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}}^{a+i\frac{b-a}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{p+1}(b-a)^{p+1}}{(p+1)!\cdot n}\sum_{i=1}^{n} f^{(p)}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{(-1)^{p+1}(b-a)^p}{(p+1)!}\int_a^b f^{(p)}(x)\,dx \\
&= \frac{(-1)^{p+1}(b-a)^p}{(p+1)!}\left[f^{(p-1)}(b)-f^{(p-1)}(a)\right]
\end{aligned}$$

证毕。虽是说数列的加边问题，但是对于函数极限，也同样可以加边。

【例 27.2】计算：

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x-\sqrt{ab}\right](a,b>0)$$

解：我们在等价无穷小的【例 6.2】已经知道

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\sqrt{ab}(a,b>0)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}-\sqrt{ab}\right]\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}-\sqrt{ab}}{t}\\
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln ab}-1}{t}
\end{aligned}$$

使用等价无穷小，有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln ab}-1}{t}\\
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln ab}{t}\\
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)-\frac{t}{2}\ln ab}{t^2}\\
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^t+b^t}{a^{\frac{t}{2}}\cdot b^{\frac{t}{2}}}\right)}{t^2}\\
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a^{\frac{t}{2}}-b^{\frac{t}{2}}\right)^2}{a^{\frac{t}{2}}\cdot b^{\frac{t}{2}}}+1\right)}{t^2}
\end{aligned}$$

再次使用等价无穷小，得：

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a^{\frac{t}{2}}-b^{\frac{t}{2}}\right)^2}{a^{\frac{t}{2}}\cdot b^{\frac{t}{2}}}+1\right)}{t^2}\\
&=\sqrt{ab}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a^{\frac{t}{2}}-b^{\frac{t}{2}}\right)^2}{a^{\frac{t}{2}}\cdot b^{\frac{t}{2}}}}{t^2}\\
&=\frac{\sqrt{ab}}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{a^{\frac{t}{2}}-b^{\frac{t}{2}}}{t}\right)^2\\
&=\frac{\sqrt{ab}}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{(a^{\frac{t}{2}}-1)-(b^{\frac{t}{2}}-1)}{t}\right)^2\\
&=\frac{\sqrt{ab}}{2}\left(\frac{\ln b-\ln a}{2}\right)^2\\
&=\boxed{\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)}
\end{aligned}$$

由于加边问题形式较为简单，我们甚至可以自己出题。

【例 27.3】计算：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)$$

解：我们知道 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$ 因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\gamma\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\\
&=-\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

由于

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

那么

$$\begin{aligned}
&-\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left[\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=-\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=-\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right]-\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=\boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

我们可以继续加边计算

【例 27.4】计算：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)-\frac{1}{2}\right]$$

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)-\frac{1}{2}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\gamma\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}}\\
&=-\lim_{n\to\infty} n^2(n+1)^2\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n+1}\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

由于

$$
\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)
$$

那么

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{6}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{6}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{4}\left(-\frac{1}{n^2(n+1)}\right)+\frac{1}{6}\\
&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\\
&=\boxed{-\frac{1}{12}}
\end{aligned}
$$

同时，我们也得到了更高精度的估计

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
$$

事实上，由 EM 公式

$$
\sum_{k=a}^{b}f(k)=\int_a^b f(x)dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\left[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right]
$$

那么令 $a=1,b=n,f(x)=\frac{1}{x}$，可得：

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\frac{1+\frac{1}{n}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\left[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right]=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k\cdot n^{2k}}
$$

具体证明过程可见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/148221397

因此，读者可自行证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{n\left[n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{12}\right\}=0$$

【例 27.5】计算：

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$$

解：考虑

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!+2\pi(1+n+\cdots+2\cdot n!)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sin\left\{2\pi\left[\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]n!\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&=\boxed{2\pi}
\end{aligned}$$

【例 27.6】计算：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[n\sin(2\pi en!)-2\pi\right]$$

解：考虑

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\left[n\sin\left(2\pi en!\right)-2\pi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left[n\sin\left(2\pi\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!\right)-2\pi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left\{n\sin\left[2\pi\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\right)n!+2\pi\left(1+n+\cdots+2\cdot n!\right)\right]-2\pi\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left\{n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-2\pi\right\}
\end{aligned}
$$

由于

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\
&=\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{8\pi^3}{(n+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\left\{n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-2\pi\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{2\pi n}{n+1}+\frac{2\pi n}{(n+1)(n+2)}+\frac{2\pi n}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{n}{6}\cdot\frac{8\pi^3}{(n+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-2\pi\right]\\
&=2\pi-\frac{4}{3}\pi^3+2\pi\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}-1\right]\\
&=2\pi-\frac{4}{3}\pi^3-2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}\\
&=\boxed{-2\pi-\frac{4}{3}\pi^3}
\end{aligned}
$$

28 累次极限

累次极限是多元函数的一种极限，求极限时有先后顺序。一般求解方法是先固定一个变量，然后先求内层极限，再求外层极限。三元及以上函数与二元函数类似，因此下面主要以二元函数为例。累次极限一般不能交换顺序，但是在满足某些特定的条件下可以交换顺序。下面给出一种定理，保证累次极限可以交换顺序。

定理 1 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U^0(P_0)$ 上有定义，若满足：
(1) 在 $U^0(P_0)$ 上, 对于任意的 $y \neq y_0$，均有 $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = g(y)$;
(2) 在 $U^0(P_0)$ 上, 关于 x 一致收敛：$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = h(x)$
那么

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

【例 28.1】计算：

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{r\to 0}\frac{\left[(x+1)^{r+1}-x^{r+1}\right]^{\frac{1}{r}}}{x}$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\lim_{r\to 0}\frac{\left[(x+1)^{r+1}-x^{r+1}\right]^{\frac{1}{r}}}{x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\lim_{r\to 0}\frac{\left[(r+1)\xi^{r}\right]^{\frac{1}{r}}}{x}(x\le\xi\le x+1)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{\xi}{x}\lim_{r\to 0}(r+1)^{\frac{1}{r}}\\
&=\boxed{e}
\end{aligned}$$

【例 28.2】计算：

$$\lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^3dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{5}{2}}}$$

解：首先观察分子分母，应该注意到分子二重积分实际上是不含 x 的，x 只是一个中间变量，最后会消去的。因此对 x 取极限时，可以只考虑分母含 x 的项。

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\\
&=e^{\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{x}{t^2}\right)}-1
\end{aligned}$$

下面计算指数的极限：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{x}{t^2}\right)\\
&=\lim_{s\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{1}{st^2}-1+1\right)}{s}\\
&=\lim_{s\to0^+}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{1}{st^2}-1}{s}\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{s\to0^+}\frac{\arctan\frac{1}{st^2}-\frac{\pi}{2}}{s}\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{s\to0^+}\frac{-\frac{1}{s^2t^2+\frac{1}{t^2}}}{1}\\
&=-\frac{2}{\pi}t^2
\end{aligned}
$$

同时考虑分子的二重积分，积分区域 $x^2\le y\le t$, $0\le x\le\sqrt{t}$ 将积分换序，得

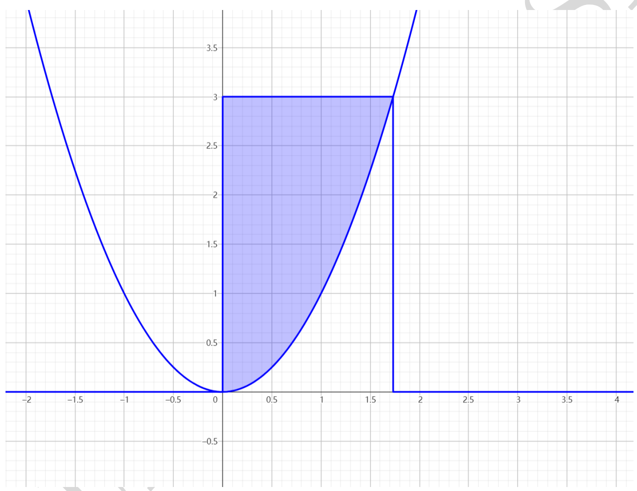

图 2: 积分区域

$$\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^3dy=\int_0^t dy\int_0^{\sqrt{y}}\sin y^3dx=\int_0^t\sqrt{y}\sin y^3dy$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^3dy}{\left[\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{5}{2}}}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^3dy}{\left(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1\right)\arctan t^{\frac{5}{2}}}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^3dy}{\left(-\frac{2}{\pi}t^2\right)t^{\frac{5}{2}}}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}\sin t^3}{\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{9}{2}\right)t^{\frac{7}{2}}}\\
&=\boxed{-\frac{\pi}{9}}
\end{aligned}
$$

【例 28.3(**难**)**】**计算：

$$
\lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^m+1}\int_0^{x^2}\frac{\pi(\sqrt[4]{1+t}-1)\sin t^4}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t}{x^2(x-\tan x)\ln\left(x^2+1\right)\left[\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]}
$$

注:本题看起来非常恐怖,非常复杂。实际上,只要逐个击破即可。本题最大的难点是计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}$

解：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^m+1}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{n\cdot 2^m+1}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1x^{n\cdot 2^m}dx\\
&=\int_0^1\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(x^{2^m}\right)^n\right)\\
&=\int_0^1\left(\sum_{m=0}^{\infty}\ln\left(x^{2^m}+1\right)\right)
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\ln\left(x^{2^m}+1\right)=\ln\left(\prod_{m=0}^{\infty}\left(x^{2^m}+1\right)\right)=\ln\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=-\ln\left(1-x\right)\left(|x|<1\right)
$$

因此

$$
\int_0^1\left(\sum_{m=0}^{\infty}\ln\left(x^{2^m}+1\right)\right)=-\int_0^1\ln(1-x)dx=1
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{dx} \\
&= -\int_0^1 \ln(1-x) d\left[\ln\left(x^2-x+1\right)\right] \\
&= -\left[\ln(1-x)\ln(x^2-x+1)\right]\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\ln(x^2-x+1)}{x-1}dx \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(t^2-t+1)}{-t}dt\,(t=1-x) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(t^3+1)-\ln(1+t)}{-t}dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}ds\left(s=x^3\right) + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{k-1}}{k}dx \\
&= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \\
&= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{18}
\end{aligned}
$$

观察分子分母，仅有分母含有 y，因此只需对分母中含有 y 的项取极限。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{y\to+\infty}\left[\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y - 1\right] \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y - 1 \\
&= e^{\lim_{y\to+\infty} y\ln\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)} - 1
\end{aligned}
$$

下面计算指数的极限

$$
\begin{aligned}
&\lim_{y\to+\infty} y\ln\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)\\
&=\lim_{s\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{2\arctan\frac{1}{sx}}{\pi}\right)}{s}\\
&=\lim_{s\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{2\arctan\frac{1}{sx}}{\pi}-1+1\right)}{s}\\
&=\lim_{s\to0^+}\frac{\frac{2\arctan\frac{1}{sx}}{\pi}-1}{s}\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{s\to0^+}\frac{-2\frac{1}{s^2+\frac{1}{x}}}{1}\\
&=-\frac{2}{\pi}x
\end{aligned}
$$

因此

$$\lim_{y\to+\infty}\left[\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]=e^{-\frac{2}{\pi}x}-1$$

最后考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域为 $[-1,1]$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2x)^{2n}}{(2n)!}$，那么

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(4n)(2x)^{2n-1},\ -1<x<1,$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(8n)(2n-1)(2x)^{2n-2},\ -1<x<1,$$

于是

$$
\begin{aligned}
&-xS'(x)+\left(1-x^2\right)S''(x)\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2n)(2x)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(8n)(2n-1)(2x)^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2n)(2n-1)(2x)^{2n}\\
&=4+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(8n)(2n-1)(2x)^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}\left(4n^2\right)(2x)^{2n}\\
&=4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n)!)^2}{(2n+2)!}8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}\left(4n^2\right)(2x)^{2n}\\
&=4
\end{aligned}
$$

因此：

$$-xS'(x)+\left(1-x^2\right)S''(x)=4,\ -1<x<1,$$

两边同时除以 $\sqrt{1-x^2}$，得

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}S'(x)+\sqrt{1-x^2}S''(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

从而

$$\sqrt{1-x^2}S'(x)=4\arcsin x+C,$$

由 $S'(0)=0$ 得 $C=0$，故

$$S'(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

两边同时积分得

$$S(x)=2\arcsin^2 x+C_1,$$

再由 $S(0)=0$ 得 $C_1=0$，则 $S(x)=2\arcsin^2 x\,(-1<x<1)$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}=2\arcsin^2 t,\ -1<t<1$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\lim_{y\to+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot2^m+1}\int_0^{x^2}\frac{\pi(\sqrt[4]{1+t}-1)\sin t^4}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{dx}}\,\mathrm{d}t}{x^2(x-\tan x)\ln(x^2+1)\left[\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\pi(\sqrt[4]{1+t}-1)\sin t^4}{2\arcsin^2 t\cdot\frac{\pi^2}{18}}dt}{x^2(-\frac{1}{3}x^3)x^2\left(-\frac{2}{\pi}x\right)}\\
&=\frac{27}{16}\lim_{x\to0^+}\frac{2x\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{\arcsin^2(x^2)}\sin x^8}{x^7}\\
&=\frac{27}{8}\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}\\
&=\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{4}\\
&=\boxed{\frac{27}{32}}
\end{aligned}$$

29 重极限

重极限与累次极限存在联系但又有差别。重极限考虑的是自变量同时趋向某个点时的极限，而累次极限是变量逐一趋向于某个值的极限。它们之间有一些联系：

定理 1 设重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$，当 $y\neq b$ 时，$\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ 存在，则

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=A$$

29.1 定义法

定义 1 设 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdot,x_n)$ 在 a 的某个去心邻域有定义，A 为一常数，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 对任意 $0<|x-a|<\delta$ 都有

$$|f(x)|<\varepsilon$$

则称 n 元函数 $f(x)$ 极限为 A，记为 $\lim_{x\to a} f(x)=A$

【例 29.1.1】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$$

解：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 对任意 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 都有

$$\left|\frac{xy}{x+y}\right|\leq\left|\frac{\sqrt{xy}}{2}\right|\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\leq\delta$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=0$$

29.2 极坐标

极坐标也是一种计算二重极限的好方法，但是大多时候，极坐标更适用于证明重极限不存在，反而计算重极限是会”出错”。虽然极坐标代换计算重极限是可行的，因为我们有定理：

定理 2 若二元函数定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点。那么重极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 的充要条件为：设 $x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 对任意 $0<r<\delta,0\leq\theta\leq 2\pi$,$(r,\theta)\in D$ 都有

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon$$

证明过程详见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/503998713

但是有些人在极坐标代换后算极限时，忽略了二重积分所取路径的任意性，导致出错。下面给出一个例子具体说明一下：

【例 29.2.1】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

解：做代换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}\\&=\lim_{r\to0}\frac{r^3\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{r^2\cos^2\theta+r\sin\theta}\\&=\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{r\cos^2\theta+\sin\theta}\end{aligned}$$

若 $\sin\theta=0$, 那么

$$\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{r\cos^2\theta+\sin\theta}=\lim_{r\to0}r\cos\theta=0$$

若 $\sin\theta\neq0$, 那么

$$\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{r\cos^2\theta+\sin\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{\sin\theta}=0$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=0$$

但是这样做对吗？如果我们取 $y=-x^2+x^3$，那么

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+(-x^2+x^3)^3}{x^3}=1$$

这与刚才计算的结果矛盾了！这是为什么？

由于定理 2 是正确的，那一定是计算过程有错误。

事实上，在刚才计算的时候，我们并没有保证θ 的任意性。换句话说，当 θ 趋于 0 时，极限 $\lim_{r\to0}\frac{r^2\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{\sin\theta}$ 是未定式。不能直接得到结果为 0，因此最后一步计算极限的出现错误。只有无穷小乘以有界量极限才为 0。

【例 29.2.2】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin(ky)}{x^2+y^4}$$

解：令 $x=r\cos\theta, y^2=r\sin\theta, y=\pm\sqrt{r\sin\theta}, \theta\in(0,\pi)$

那么

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin(ky)}{x^2+y^4}\\&=\lim_{r\to0^+}\frac{\pm r^2\sin\theta\cos\theta\sin k\sqrt{r\sin\theta}}{r^2}\\&=\lim_{r\to0^+}\pm\sin\left[\sqrt{r}\left(k\sqrt{\sin\theta}\right)\right]\sin\theta\cos\theta\\&=\boxed{0}\end{aligned}$$

29.3 夹逼准则

【例 29.3.1】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$$

解

$$0\le\left|\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|\le\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|+\frac{x^2}{x^2+y^2}y^2\le|y|+y^2\to0\ ((x,y)\to(0,0))$$

【例 29.3.2】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$

解：由于

$$0\le\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}\frac{1}{2}$$

因此

$$0\le\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to0\ ((x,y)\to(0,0))$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\boxed{0}$$

【例 29.3.3】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin(ky)}{x^2+y^4}$$

解：

$$0\le\left|\frac{xy\sin(ky)}{x^2+y^4}\right|\le\left|\frac{xy^2}{2xy^2}\right|\cdot|\sin ky|=\frac{1}{2}|\sin ky|\to0\ ((x,y)\to(0,0))$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin(ky)}{x^2+y^4}=\boxed{0}$$

29.4 整体法

整体法，实际上是将某些元素看成一个整体，比如 $xy, x+y, x-y, \frac{x}{y}$ 等，如果它们满足一些性质 (如趋于 0)，那么可以将整体运用重要极限，等价无穷小，Taylor 公式等，与单变量的极限类似。

29.4.1 重要极限

【例 29.4.1.1】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{xy}$$

解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{xy} = \boxed{1}$$

【例 29.4.1.2】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)\sin(x^2y)}{x^2y^2\sin(xy)}$$

解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\frac{xy^2}{2})\sin(\frac{x^2y}{3})}{x^2y^2\sin(xy)} = \frac{1}{6}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy^2)(x^2y)}{x^2y^2(xy)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

【例 29.4.1.2】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} \left(1+\frac{1}{x+y}\right)^x$$

解：

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} \left(1+\frac{1}{x+y}\right)^x = \lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} \left(1+\frac{1}{x+y}\right)^{x+y} = \boxed{e}$$

29.4.2 等价无穷小

【例 29.4.2.1】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$$

解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{2}}{xy} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

【例 29.4.2.2】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)\cdot\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)\cdot\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cdot(x+y)}{\frac{1}{2}(x+y)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\frac{1}{2}(x+y)}$$

由于

$$0 \le \left|\frac{xy}{\frac{1}{2}(x+y)}\right| \le \sqrt{xy} \to 0\ ((x,y)\to(0,0))$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)\cdot\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)} = \boxed{0}$$

29.4.3 Taylor 公式

【例 29.4.3.1】计算：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy-\sin xy)(x+y)^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\ln(1+x+y)^{\frac{1}{xy}}\sin^4(xy)}$$

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy-\sin xy)(x+y)^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\ln(1+x+y)^{\frac{1}{xy}}\sin^4(xy)}\\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy-\sin xy)(x+y)^2}{\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}\ln(1+x+y)\right]x^4y^4}\\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy-\sin xy)(x+y)^2}{[x+y-\ln(1+x+y)]\,x^3y^3}\\
=&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2(\frac{(xy)^3}{6}+o(x^3y^3))}{\left[\frac{(x+y)^2}{2}+o((x+y)^2)\right]x^3y^3}\\
=&\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}\\
=&\boxed{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

30 一些著名结论

30.1 著名常数

30.1.1 π

结论 1 (莱布尼兹级数)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$$

证明: 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k=\frac{1}{1+x^2}(|x|<1)$$

两边同时 0 到 1 积分，得

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1(-x^2)^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

而
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$
因此
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

结论 2 (巴塞尔问题)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

证明：考虑 $\sin x$ 的无穷乘积展开式
$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{(k\pi)^2}\right]$$
以及 $\sin x$ 的泰勒展开
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$
那么
$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{(k\pi)^2}\right] = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$$
对比一下平方项系数，立得
$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k^2\pi^2} = -\frac{1}{6}$$
因此
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

结论 3 (高斯积分)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

证明：由于
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$
因此只需证明
$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

法一 (二重积分)：

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}d\rho \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\bigg|_0^{+\infty} d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

因此 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

法二 (Γ 函数)：考虑

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$$

作变量替换 $t = x^2, dt = 2xdx$ 因此

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}e^{-x^2}dx$$

令 $s = \frac{1}{2}$，则

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

考虑余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 则

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

因此 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

结论 4 (狄利克雷积分)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

我们在黎曼引理【例 22.4】中已经证明过，不再赘述。

推论 1 事实上，对任意 $p>0$，都有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin px}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

我们只需要换元 $x=\frac{t}{p}, dx=\frac{1}{p}dt$ 即可。

【例 30.1.1.1】计算：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

解：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx\\
=&\int_0^{+\infty}\sin^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right)\\
=&-\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx\\
=&\boxed{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

30.1.2 e

两种定义:

定义 1 (极限定义)

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

定义 2 (级数定义)

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

定理 1 (欧拉公式)

$$e^{i\theta}=i\sin\theta+\cos\theta$$

30.1.3 ϕ

定义 3 (斐波那契数列)$F_1=F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 3)$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

推论 2

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

30.1.4 γ

定义 4 (极限定义)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n \right]$$

定义 5 (反常积分定义)

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_1^{n} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} dx - \ln n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx - \ln n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \ln n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

推论 3

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \Psi(1)$$

30.1.5 G

卡特兰常数 (Catalan's Constant) 用字母 G 表示, 其定义为：

定义 6 (级数定义)

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

定义 7 (积分定义)

$$G=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan x dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}dx$$

【例 30.1.5.1】讨论 $I(a)$ 的敛散性, 并计算当 $k=2$ 时 $I(1)$ 的值：

其中

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{1+x^k}dx(a\geq 0)$$

解：首先，$\frac{\ln(1+ax)}{1+x^k}\geq 0$

1. 当 $k\leq 1$ 时. 存在 $X=\max\{1,\frac{e-1}{a}\}$, 当 $x>X$ 时，

$$\int_X^{+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{1+x^k}dx\geq\int_X^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx=+\infty$$

因此反常积分发散。

2. 当 $k>1$ 时，那么存在 $\varepsilon>0$, 使得 $k>1+\varepsilon$. 并且存在 $M>0$, 使得 $\ln(1+ax)\leq Mx^{\varepsilon}$ 考虑区间 $[1,+\infty)$ 那么

$$\begin{aligned}&\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{1+x^k}dx\\&<\int_1^{+\infty}\frac{Mx^{\varepsilon}}{x^k}dx\\&=M\left.\frac{x^{\varepsilon-k+1}}{\varepsilon-k+1}\right|_1^{+\infty}\\&=\frac{M}{\varepsilon-k+1}\end{aligned}$$

下面考虑 $[0,1]$ 区间。由于 $k>1$，因此 $1+x^k\geq 1$,$\ln(1+ax)\leq M'$ 因此

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^k}dx\\&<\int_0^1\frac{M'}{1}dx\\&=M'\end{aligned}$$

因此 $I(a)$ 关于 a 在 $[0,+\infty)$ 内闭一致收敛。因此

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^k)(1+ax)}dx$$

当 $k=2$，有

$$
\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)} dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{(ax+1)-1}{(1+x^2)(1+ax)} dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)(ax+1)} dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{a} \int_0^t \frac{1}{ax+1} dx + \frac{1}{a^2} \int_0^t \frac{(ax^2+x)-x}{(1+x^2)(ax+1)} dx \right] \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{a} \int_0^t \frac{1}{ax+1} dx + \frac{1}{a^2} \int_0^t \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{1}{a^2} \int_0^t \frac{x}{(1+x^2)(ax+1)} dx \right] \\
&= \frac{\pi}{2a} + \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\ln(1+at)}{a^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{2a^2} \right] - \frac{1}{a^2} I'(a) \\
&= \frac{\pi}{2a} + \frac{\ln a}{a^2} - \frac{1}{a^2} I'(a)
\end{aligned}
$$

因此

$$
I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^2+1} + \frac{\ln a}{a^2+1}
$$

由于 $I(0)=0$, 那么

$$
I(a) = \int_0^a \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{\ln x}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \arctan a + \int_0^a \frac{\ln x}{x^2+1} dx
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I(1) &= \frac{\pi^2}{8} + \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1} dx \\
&= \arctan x \cdot \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx + \frac{\pi^2}{8} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - G
\end{aligned}
$$

30.1.6 A

Glaisher-Kinkelin 常数

定义 8

$$
A = \lim_{n\to\infty} \frac{1^1 2^2 \cdots n^n}{n^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{12}} \cdot e^{-\frac{n^2}{4}}}
$$

【例 30.1.6.1】求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}}{e^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{1}{2}}}$$

解：记 $x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}}{e^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned}\ln x_n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\binom{n}{k}-\frac{n}{2}+\frac{\ln n}{2}\\&=\frac{1}{n}\left(n\ln n!-\sum_{k=1}^{n}\ln k!-\sum_{k=1}^{n}\ln(n-k)!\right)-\frac{n}{2}+\frac{\ln n}{2}\\&=\frac{1}{n}\left((n+1)\ln n!-2\sum_{k=1}^{n}\ln k!\right)-\frac{n}{2}+\frac{\ln n}{2}\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k!=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln k=(n+1)\ln n!-\sum_{k=1}^{n}k\ln k$$

化简得到

$$\ln x_n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k\ln k-\frac{n+1}{n}\ln n!-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\ln n$$

由于

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^12^2\cdots n^n}{n^{n^2/2+n/2+1/12}e^{-n^2/4}}$$

$$\ln x_n=\frac{2}{n}\ln A_n+\left(n+\frac{3}{2}+\frac{1}{6n}\right)\ln n-n-\frac{n+1}{n}\ln n!$$

$$\ln x_n=\frac{2}{n}\ln A_n-\frac{1}{3n}\ln n+1-\frac{n+1}{n}\ln\sqrt{2\pi}-\left(1+\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n}\right)=1-\ln\sqrt{2\pi}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}}{e^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{1}{2}}}=\boxed{\frac{e}{\sqrt{2\pi}}}$$

更多数学常数可见：http://www.ebyte.it/library/educards/constants/MathConstants.html

30.2 著名不等式

30.2.1 Cauchy-Schwarz 不等式

定理 2 若 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

证明：考虑

$$\int_a^b [f(x)-kg(x)]^2\,dx = k^2\int_a^b g^2(x)dx - 2k\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$$

因此

$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

因此

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

30.2.2 Young 不等式

定理 3 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导且严格单增，$f(0)=0, a>0, b=f(a)>0$ 则

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

其中 $f^{-1}(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数. 当且仅当 $b=f(a)$ 等号成立。

30.2.3 Holder 不等式

定理 4 若 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p,q>0)$，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

30.2.4 Minkowski 不等式

定理 5 设 $f(x),g(x)\in R[a,b], 1\leq p<+\infty$, 则有

$$\left[\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

30.2.5 Hadamard 不等式

定理 6 设 $f(x)$ 是 (a,b) 的下凸函数, 对任意 $x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$ 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

30.2.6 Favard 不等式

定理 7 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负凹函数，对任意 $p>1$，成立

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)dx\le\frac{2^p}{p+1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p$$

极限 50 题 (旧)

原作者知乎 @ 陌亿 :https://zhuanlan.zhihu.com/p/464349656

注：实际有 51 题。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan x}^{p\text{ 次}}-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin x}^{p\text{ 次}}}{\tan x-\sin x}$，其中 $p\in N^{+}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(a+x)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^{3}+\dfrac{x}{2}-x^{3}\tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^{6}}\right]$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1}-\sqrt[3]{x^{3}+x^{2}+x+1}\cdot\dfrac{\ln\left(x+e^{x}\right)}{x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{x^{2}+x-1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{\pi}{4}\cdot x\right]$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^{2}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arctan x-\left(x^{2}+1\right)\arctan^{3}x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right], a>1$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[n\sin(2e\pi\cdot n!)-2\pi\right]$

12. 设数列 a_n 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n\geq 1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$ 。

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$

15. $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)$

16. 设 $S_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 。

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{an}+2^{an}+\cdots+n^{an}}{n^{an}}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)$ 其中 p 为自然数。

21. $-1<x_0<1, x_n=\sqrt{\dfrac{1+x_{n-1}}{2}}(n=1,2,3\cdots)$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+1-k}{nC_n^k}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2\left[\dfrac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}$

25. $f\left(x\right)$ 在 x_0 处可导, $a_n<x_0<b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(b_n\right)-f\left(a_n\right)}{b_n-a_n}=f'\left(x_0\right)$$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2+k}\right)-\frac{n}{3}\right)$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+n^2+n^3+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}$

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{2i-1}{n^2}a$

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(n^k+1\right)^{-\frac{1}{k}}+\left(n^k-1\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$

34. 设 $\alpha_k=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, 求 $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{k}{{\alpha_k}^n+\alpha_k}\right)$

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x+\dfrac{i}{n^2}\right)}{x+\frac{k}{n^2}}dx$

36. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}$

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}$

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}+\sin\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{i+j}{i^2+j^2}$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\{\dfrac{n}{k}\}^2$, $\{a\}$ 表示 a 的小数部分。

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^k$

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha k}$

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^k}{2^{2^k}+1}$

44. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}-\cdots\right)^2$

45. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \sin^2\left(\pi\sqrt{k^2+k}\right)$

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} dx}{\ln n}$

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \sqrt{x^2+k}$

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}\right)^n$

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x\sin nx}{1+n^6x^2} dx$

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$

51. $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\sqrt[m]{m+1} \cdot \sqrt[m^2+m]{\prod\limits_{k=1}^{m} C_m^k}\right)$

极限 50 题 (新)

原作者知乎 @ 陌亿 :https://zhuanlan.zhihu.com/p/586648267

注：实际有 53 题。

二、热身题

1. $a_1=\sqrt{1+2015}, a_2=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016}}$,

$$\cdots a_n=\sqrt{\left(1+2015\sqrt{1+2016\sqrt{1+\cdots+(2014+n)\sqrt{1+(2013+n)}}}\right)}, \lim_{n\to\infty} a_n$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2+t}}\,\mathrm{d}t$

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n}-\frac{2}{\pi}n\right)$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\sum_{k=1}^{n}a_k^2=1, \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}a_n$

5. 若 $a_n, b_n > 0$, $\forall n \geq 1$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{na_n} = a \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{nb_n} = b \in \mathbb{R}^+$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{(n!)^3}} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k b_k)^{\frac{1}{k}}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n \left[\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^{\frac{1}{n}}}{m} \right)^n - \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{m}} \right]$

7. $f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 上的可积函数, 且在 $x = 1$ 处连续, 当 $k \geq 1$ 时, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} \int_0^1 \left(x + 2^k x^2 + \cdots + n^k x^n \right) f(x) \, \mathrm{d}x$

8. $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为正实数列, 满足 $b_0 = 1$ 且 $b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_{n-1}}}$, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n 2^n$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n \left[\left(\dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{n^2 + k^2}} \right)^n - \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} \right]$

10. $f \in \mathbb{R}[0,1]$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\dfrac{k}{n} \right)$

11. $f(x) \in C[0,1]$, $f(x) > 0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int_0^1 f^{n+1}(x) \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x) \, \mathrm{d}x}$

12. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right)+4\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\frac{8n}{11}\right]}\right)\right\}$

三、正式开始

1. 设 $I_n=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{e^{-x_{n+1}^{2n}-x_{n+2}^{2n}-\cdots-x_{2n}^{2n}}-e^{x_1^{2n}-x_2^{2n}-\cdots-x_n^{2n}}}{x_1^{2n}+x_2^{2n}+\cdots+x_n^{2n}-x_{n+1}^{2n}-x_{n+2}^{2n}-\cdots-x_{2n}^{2n}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}-\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\limits_{0\le x<+\infty}\left|e^{-x}-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}\right|\right)^{\frac{1}{n}}$

4. $a,b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}^+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{c+\prod\limits_{k=0}^{n}\sin^2(x+k)}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{\left(\sqrt{2}\cos x\right)^n + \left(\sqrt{2}\sin x\right)^n}\,\mathrm{d}x$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)$

7. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

8. $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}, a_1=1$, 证明: $a_n=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n\int_0^n \frac{\arctan\frac{x}{n}}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right)$

10. 设实数 x,y,z 满足 $e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$, 求

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)$$

11. 设 $a_n=\frac{\ln n}{n}, m\geq 0, \lambda>0$, 试确定常数 t , 使得

$$\lim_{n\to\infty} nt^n\left[\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{m}(a_i)^n}-\max_{1\le k\le m}\{a_k\}\right]=\lambda$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x}{\arctan(nx)}\mathrm{d}x\right)^n-e^{\frac{4}{3\pi^2}}\right)$

13. $\lim\limits_{t\to\infty} t\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k^2+t^2}}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

15. 令 $A_n=\sum\limits_{k-1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$，求

$$\lim_{n\to\infty} n(n(n(n(n(n(-1)^n n!(e(1-A_n)-1)-e)+2e)-5e)+15e)$$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right)$

17. $q_n=3^{3^n}+1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{6q_0^2+\sqrt[3]{6q_1^2+\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{6q_n^2}}}}$

18. $$\lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to+\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n2^m+1}\int_0^{x^2}\frac{\pi\left(\sqrt[4]{1+t}-1\right)\sin t^4}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}dx}}{x^2\left(x-\tan x\right)\ln\left(x^2+1\right)\left[\left(\frac{2\arctan\frac{x}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]}$$

19. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)\right]^m\left(x_1^q+\cdots+x_n^q\right)^s}{\left(\frac{\pi}{2}x_1+\frac{\pi}{2}x_2+\cdots+\frac{\pi}{2}x_n\right)^m\left(x_1^p+\cdots+x_n^p\right)^s}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

20. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi k}{2n}\int_0^1 x^{2n}\sin\frac{x\pi}{2}\,\mathrm{d}x$$

21. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛, 设 n_0 是某一自然数, 若当 $n>n_0$ 时, 有 $x_n<x_{n+1}, x_n<\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right), y_{n+1}\le y_n$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_ny_n}{x_{n+1}-x_n}=0$

22. $$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\int_0^1\left(1+x^n\right)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x-1\right)$$

23. $$\lim_{n\to\infty}n\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m}+\frac{5}{4m^2}\right)$$

24. $a,b\in\mathbb{R}^+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+b+\sqrt{n^2+kn+a}}$

25. $k \in \mathbb{N}^*$，求 (1) $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^{n+k}\right)}{\ln\left(1+x^n\right)} \mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^{n+k}\right)}{\ln\left(1+x^n\right)} \mathrm{d}x - L \right)$

26. $f : [a, b] \to [0, \infty)$ 上的连续函数, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{\int_a^b f^{n+1}(x)\, \mathrm{d}x} - \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\, \mathrm{d}x} \right)$

27. $f_0(x) \in R[0,1]$，$f_0(x) > 0$，$f_n(x) = \sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t}\,(n = 1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

28. $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$，$u_0 = a, v_0 = b$，$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$，$v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1} v_n}$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{b \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{\arccos \frac{a}{b}}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi^n n^n}{\left(2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}\right)^{2n}}$

30 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n} \right) \mathrm{d}x$

31. 设 $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{2n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$

32. $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\left(a_n - \sqrt{2n}\right)$

33. 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 且 $f(x) \geq 0, g(x) > 0$, $f(x)$ 严格单调递增, 证明 (1) 对 $n \in \mathbb{N}$, 当 n 充分大时, 存在 $x_n \in [a,b]$, 使得 $\dfrac{f^n(x_n)}{\ln n} = n^3 \displaystyle\int_a^b f^n(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

34. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_i}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{3} - \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$

35. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k\uparrow 2}}{n^7}$

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n} \sum\limits_{k=2}^{n-2} \dfrac{1}{\ln k \cdot \ln(n-k)}$

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k\ln k}{\ln(\ln n)}$

38$S_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k}\dfrac{n-i}{n+i+1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$

39. 设 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\dfrac{1}{2^k(n+k+1)}\,(n\geq 1)$, 求 S_n 的等价无穷小 $(n\to\infty)$

40. 设 $f:[0,1]\to(0,\infty)$ 上的函数, 满足 $\dfrac{\ln(f(x))}{x}\in R[0,1]$, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的可积函数且在 $x=1$ 连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\int_0^1\sqrt[n]{f(x^n)}g(x)dx-\int_0^1 g(x)dx\right)=g(1)\int_0^1\frac{\ln f(x)}{x}dx$$

参考文献

[1] 庹亚林. Stolz 定理数列形式的一个逆命题及其推广 [J]. 重庆工商大学学报（自然科学版）,2009,26(4):322-326. DOI:10.3969/j.issn.1672-058X.2009.04.004.

[2]《Limits, Series, and Fractional Part Integrals》.

[3] Laplace 方法.https://zhuanlan.zhihu.com/p/3721167104

[4] 四种余项的泰勒公式及其证明.https://zhuanlan.zhihu.com/p/550513650

[5] 《微分中值定理与导数的应用》题型、求解思路与典型练习（三）

[6] 微分中值定理之求极限https://zhuanlan.zhihu.com/p/74552931

[7] 百度百科. 积分中值定理

[8] 微积分每日一题 1-117：利用积分中值定理求极限.https://zhuanlan.zhihu.com/p/655120588

[9] 对“定积分及其部分和之差的数列极限”的推广.https://zhuanlan.zhihu.com/p/931322500

[10] 巧用积分第二中值定理推论.https://mp.weixin.qq.com/s/5xWrOfXnx1qqiO0-Nj6FDA

[11] 利用二重积分的定义求极限.https://zhuanlan.zhihu.com/p/434912374

[12] 拟合法求极限.https://zhuanlan.zhihu.com/p/4748187315

[13] 一般形式 Toplitz 定理 (特普利茨定理)、证明、应用 .

[14] 运用 Abel 变换解决一道无穷级数试题.https://zhuanlan.zhihu.com/p/351402590

[15] 关于逼近的 23 事.https://zhuanlan.zhihu.com/p/130394480

[16] 第十四届大学生数学竞赛数学类 A 组第五题更标准的解法..

[17] 分段估计——解决一类含有定积分极限题的有效方法.https://zhuanlan.zhihu.com/p/3127792428

[18] 一致收敛: 极限与积分号，微分号交换顺序.https://zhuanlan.zhihu.com/p/91106343

[19] 控制收敛定理.https://zhuanlan.zhihu.com/p/514932539

[20] 有界收敛定理 (Arzela 控制收敛定理).https://zhuanlan.zhihu.com/p/657423915

[21] CMC3: 超纲! 控制收敛定理秒杀大学生数学竞赛极限.

[22] 一道用黎曼引理求积分极限的考研网红题.

[23] 积分极限、无穷级数？Riemann 引理来了！.

[24] 黎曼引理丨直接用, 行吗?.

[25] 特殊函数入门指南——伽马函数 (一).https://zhuanlan.zhihu.com/p/350992875

[26] Gamma 函数的那些事儿 (2)——欧拉常数与 Digamma 函数.

[27] Beta 函数的几个变式及其简单应用.https://zhuanlan.zhihu.com/p/695879137

[28] 伽马函数和贝塔函数的性质与应用（收藏）.

[29] 一道积分极限综合运算（beta 函数 VS 多次分部积分）.

[30] 一道微信朋友问的含 Beta 函数的极限好题.

[31] 十六届全国大学生数学竞赛 (数学类) 第二题.https://zhuanlan.zhihu.com/p/6037720337

[32] 傅里叶级数关于第一类间断点的问题.https://zhuanlan.zhihu.com/p/606978752

[33] 数学随笔 (V): 傅里叶级数的妙用.https://zhuanlan.zhihu.com/p/448796014

[34] 傅里叶级数、伯努利数、留数定理求解无穷级数的收敛值.https://zhuanlan.zhihu.com/p/680125102

[35] 百度百科. 生成函数.

[36] 百度百科. 伯努利数.

[37] 如何计算前 n 个整数的 p 次幂的和？证明伯努利幂和.

[38] 【数论笔记之五】欧拉-麦克劳林（Euler-Maclaurin）.https://zhuanlan.zhihu.com/p/719622912

[39] 如何解这道极限题?.https://www.zhihu.com/question/629170812/answer/3279811368

[40] 典型极限加边一题.

[41] 带余项的泰勒公式、欧拉-麦克劳林公式的推导.https://zhuanlan.zhihu.com/p/148221397

[42] 累次极限可交换的条件（充分条件）.https://zhuanlan.zhihu.com/p/522070730

[43] 每日一练 494：一个包含累次积分的累次极限式极限的综合性计算问题.

[44] （数分笔记）重极限和累次极限.https://zhuanlan.zhihu.com/p/592210837

[45] 求二重极限时, 极坐标代换究竟该怎么用?.https://zhuanlan.zhihu.com/p/503998713

[46] 二重极限的最强解法——极坐标代换法!!! .https://zhuanlan.zhihu.com/p/143541324

[47] 多元函数求极限方法总结.https://zhuanlan.zhihu.com/p/98921951

[48] sin x 的无穷乘积展开式.https://zhuanlan.zhihu.com/p/325840033

[49] 计算一类含有高斯函数的定积分与欧拉常数 .https://zhuanlan.zhihu.com/p/720426443

[50] 讨论一个反常积分.https://zhuanlan.zhihu.com/p/10041461368

[51] Glaisher-Kkinkelin 常数的一个渐近估计.https://zhuanlan.zhihu.com/p/676666457

[52] 一些常用的积分不等式，你记住了？.

[53] 极限 50 题.https://zhuanlan.zhihu.com/p/464349656

[54] 新极限 50 题.https://zhuanlan.zhihu.com/p/586648267