

目录

0.1	极限与连续	2
0.1.1	单调有界定理	2
0.1.2	Stolz 定理	3
0.1.3	Cauchy 收敛准则	5
0.1.4	一致连续	6
0.1.5	压缩映射定理	8
0.1.6	杂题	10
0.1.7	压缩映射-进阶	11
0.1.8	关于不动点的再讨论	12
0.2	实数的完备性	14
0.2.1	实数完备性定理	14

0.1 极限与连续

0.1.1 单调有界定理

题目 1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

解:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \overbrace{1 \cdots 1}^{n-2 \text{个} 1}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

定理 1: 单调有界定理

有界的单调数列必收敛.

题目 2. 证明单调有界定理.

证明. 不妨设 a_n 单调递增, $a = \sup a_n$. 则由上确界的定义立知 $a_n \leq a$, 且 $\forall \varepsilon > 0, a - \varepsilon < a$, 故存在 $N > 0$, 使得 $a_N > a - \varepsilon$.

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall n > N$, 有:

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \quad (1)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

题目 3. 若单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.(注意与单调有界定理相比较)

证明. **法一:** 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增, 只需证明 $\{a_n\}$ 有上界即可. 设子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛, 则 $\exists M > 0, s.t. a_{n_k} < M$. 但对任意的 k , 由于 $k \leq n_k$, 故 $a_k \leq a_{n_k} < M$.

因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

法二: 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0$, 当 $k > K$ 时, 有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

当 $n > n_{K+1}$ 时, 存在 $m > n > K + 1$, 使得 $n < m \leq n_m$. 故 $a_{n_{K+1}} < a_n \leq a_{n_m}$, 也即:

$$-\varepsilon < a_{n_{K+1}} - a < a_n - a \leq a_{n_m} - a < \varepsilon$$

也即 $\{a_n\}$ 收敛. □

0.1.2 Stolz 定理

定理 2: Stolz 定理

1. $(\frac{*}{\infty})$ 设 x_n (严格) 单调递增趋于无穷大, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

2. $(\frac{0}{0})$ 设 x_n (严格) 单调递减趋于 0, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

注: 极限等式成立的前提, 除了对单调性和极限有要求外, 还要求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ (*) 必须存在 (包括非正常极限). 满足题干条件外, 当 (*) 极限为 $+\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$; 当 (*) 极限为 $-\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = -\infty$.

注: 不能认为 (*) 式极限不存在, 则左式极限一定不存在. 例如取 $y_n = (-1)^n, x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, 但 $\frac{(-1)^{n+1} - (-1)^n}{(n+1) - n} = 2 \cdot (-1)^{n+1}$ 极限不存在.

注: 在满足特定的条件下才有 Stolz 逆定理 (即使用左式极限推右式). 例如, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 和 (*) 极限均存在时, 我们可以利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 的极限计算 (*) 的极限. 当然, Stolz 逆定理还有一些其它的版本, 但比较复杂, 目前用不到.

题目 4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})}{(n) - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (2)$$

注: 当 a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 也成立.

题目 5. 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

解: 1. 当 $a = 0$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

2. 当 $a \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)}{n}} = e^{\ln a} = a \quad (4)$$

题目 6. 求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}}$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln \left(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}\right)} \quad (5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2020}} \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020} = \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021} \quad (7)$$

题目 7. 设 $x_{n+1} = \sin x_n, x_1 \in (0, \pi)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n$

解: 显然 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0, 故:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} \quad (8)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = 3 \quad (9)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$$

注: 读者可思考一下, 在进行计算时, 为什么使用 $\frac{n}{x_n^2}$, 而不是 $\frac{x_n^2}{n}$?

注: 本题还可以“加边”, 即再次使用 Stolz 定理, 可以求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n) = \frac{3}{10}$. 不过不要先着急求, 我们再看一个稍微“复杂”一点的题目.

题目 8. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, 求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$$

解: 第一步, 我们首先求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$. 由于 x_n 单调递增到 ∞^1 , 因此我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} + x_n}{2x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n + \frac{1}{x_n}}{2x_n} = 1 \quad (10)$$

¹单调易见, 使用反证法可看出趋于无穷

我们得到一个很有用的结论: $x_n \sim \sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$.

那么:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}\right) - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{4} \quad (13)$$

注: 我们观察计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ 的步骤, 发现有多处使用了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 的结果. 事实上, 这是一种做题技巧.

具体来说, 我们要使用 Stolz 定理, 尤其是递推数列算一个分式的极限的时候, 我们尽可能要消去 n (不包括数列 $\{x_n\}$ 中的 n), 换句话说, 就是统一变量. 把含有 n 的式子尽量化为 $a_n + kn$ 的形式, 且也不是分式, 这就解释了为什么刚才我们不使用 $\frac{x_n^2}{n}$ 来计算.

另外, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 也很自然了. 一方面是使用有理化, 把 $\sqrt{2n}$ 变为 $2n$ 时要用到, 另一方面把 $\frac{1}{n}$ 化为 $\frac{2}{x_n^2}$ 要用到.

把所有显含 n 的式子转化为数列后, 我们可以使用递推关系式统一变量, 比如均转化为 x_n . 这样, 再使用海涅归结原则, 我们只需求解其对应的函数极限即可.

0.1.3 Cauchy 收敛准则

定理 3: 数列收敛的 Cauchy 准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (14)$$

上述定理亦可等价: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $n > N$, 和一切 $p \in \mathbb{N}^+$, 均有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad (15)$$

题目 9. 若对任意的 $p \in \mathbb{N}^+$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 那么 $\{a_n\}$ 收敛吗?

解: $\{a_n\}$ 不一定收敛, 比如取 $a_n = \sqrt{n}$, 那么 $0 \leq |a_{n+p} - a_n| = |\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

注: 极限不一定存在的原因: 题目表述和 Cauchy 收敛定理并不等价, 题目是指固定一个 p 后, 我们能证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 即找到一个 $N = N(p, \varepsilon)$; 而 Cauchy 收敛准则则是固定了 $N = N(\varepsilon)$, 再选取 p , 此时 N 已经和 p 无关了, 因此 Cauchy 收敛准则的要求更高一些.

注: 将 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$ 改为 $|a_{n+p} - a_n| \Rightarrow 0$, 即对于 $n \rightarrow \infty$ 时, 关于 p 一致收敛. 则可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

定义 1: 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 有定义, 如果满足:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (16)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

定理 4: 函数极限存在的柯西收敛准则

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta')$ 有定义, 我们说它在 $x = x_0$ 处收敛, 如果对于 $\varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta'$, 使得 $\forall x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (17)$$

0.1.4 一致连续

定义 2: 一致连续

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得任意 $x', x'' \in I$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (18)$$

注: 从直观上来看, 柯西收敛准则和一致连续的定义很相似。它们主要的区别是, 柯西收敛准则只考虑了 x_0 那一点的性质, 而一致连续则考虑了全局的性质。

定理 5

闭区间上的连续函数一致连续.

定理 6: 一致连续的可加性

设函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a, b]$ 和 $[b, c]$ ($a < b < c$) 一致连续, 则 f 在 $[a, c]$ 上一致连续. 且当 $c = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 也成立 (相应区间括号要进行修改).

题目 10. 若 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$, 证明:

- (1) 函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续;
- (2) 函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续.

证明. 首先, 我们有

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (19)$$

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 对任意 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_1^{\frac{n-2}{n}}x_2 + \cdots + x_2^{\frac{n-2}{n}}x_1 + x_2^{\frac{n-1}{n}}} \right| \quad (20)$$

$$\leq \frac{1}{n}|x_1 - x_2| < \varepsilon \quad (21)$$

这说明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续, 又由于 f 在 $[0, 1]$ 连续, 故一致连续, 因此函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall 0 < \delta < \frac{1}{2}$, 存在 $x_1 = \frac{1}{\delta^2} > 1, x_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta^2} > 1$, 即使 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有:

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1}) > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{n}{\delta^2} > n > \varepsilon \quad (22)$$

故函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续. \square

注: 问题 (2) 当然也可取 $x_m = m + \frac{1}{m}, y_m = m$, 即使 $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m - y_m) = 0$, 但 $|x_m^n - y_m^n| > \frac{1}{m} \cdot mn > \varepsilon$.

定义 3: Lipschitz 连续

对于定义在区间 I 上的实值函数 $f(x)$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in I, \exists L > 0$ 使得:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| \quad (23)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 连续.

题目 11. 证明 Lipschitz 连续的函数一致连续.

证明. Lipschitz 连续比一致连续条件要强, 我们只需书写 Lipschitz 连续的定义, 并限制 $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 那么有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \quad (24)$$

得证. \square

0.1.5 压缩映射定理

定理 7: 压缩映射 1

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $a \in \mathbf{R}, r \in (0, 1)$, 若从某项开始, 有:

$$|a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a| \quad (25)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且以 a 为极限.

证明. 假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始, 有 $|a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a|$, 那么:

$$0 \leq |a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a| \leq r^2|a_{n-2} - a| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_N - a| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (26)$$

得证. □

定理 8: 压缩映射 2

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $r \in (0, 1)$, 若从某项开始, 有:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \quad (27)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先, 类似地假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始, 有 $|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$, 那么 $\forall n > N, p \in \mathbf{N}^+$, 我们有:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_{N+1} - a_N| \quad (28)$$

以及三角不等式, 得到:

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \quad (29)$$

$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \quad (30)$$

$$\leq (r^{n-N+p+1} + r^{n-N+p} + \cdots + r^{n-N}) |a_{N+1} - a_N| \quad (31)$$

$$= \frac{r^{n-N}(1 - r^{p+2})}{1 - r} |a_{N+1} - a_N| \quad (32)$$

$$< \frac{r^{n-N}}{1 - r} |a_{N+1} - a_N| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (33)$$

得证. □

定理 9: 压缩映射 3

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $y = f(x)$ 为定义在区间 I 的可微函数, $x_n \in I$ 且 $x_{n+1} = f(x_n)$. 若存在 $r \in (0, 1)$, 使得:

$$|f'(x)| \leq r < 1, \quad (x \in I) \quad (34)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且以 $f(x) = x$ (其所有的解称之为**不动点**) 的某个解为极限.

证明. 显然 $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq r|x_n - x_{n-1}|$. 然后使用压缩映射 1 定理即得 $\{x_n\}$ 极限存在.

另外, 对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时取极限, 得 $f(x) = x$, 得证. □

注: 当压缩常数 $r = 1$ 时, 上面三个定理一般都不成立, 一个易见的例子是, 取 $f(x) = x, x_n = n$.

题目 12. 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $|f'(x)| < 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 \in [a, b]$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 且不依赖于 x_1 .

[分析]: 我们发现此时压缩常数为 1, 无法使用压缩映射了. 而且 $|f'(x)|$ 不一定有连续性, 所以不一定有最大值, 因此我们需要想办法找到一个连续的函数 $H(x)$, 使得 $\max_{x \in [a, b]} |H(x)| < 1$ 恒成立.

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$, 则 $\exists x_0 \in [a, b]$, s.t. $f(x_0) = x_0$. 下面我们证明 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限. 取

$$|H(x)| = \begin{cases} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\xi)| < 1, & x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ |f'(x_0)|, & x = x_0 \end{cases} \quad (35)$$

易知 $|H(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $|H(x)| < 1$, 那么取 $r = \max_{x \in [a, b]} |H(x)| < 1$, 因此:

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leq r|x_n - x_0| \quad (36)$$

注意上述不等式是使用 $|H(x)|$ 的性质推出的, 而不是 Lagrange 中值定理. □

题目 13. 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, 且满足 $L = 1$ 的 Lipschitz 连续, 若:

$$x_1 \in [a, b], \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)] \quad (37)$$

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

证明. 首先, 我们有 $a \leq x_n \leq b$, 以及:

$$x - y \leq f(x) - f(y) \leq y - x, \quad y \geq x \quad (38)$$

令 $g(x) = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$, 对 $\forall y \geq x$, 有:

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x - [f(x) - f(y)]}{2} \geq 0 \quad (39)$$

故 $g(x)$ 单调递增. 由 $x_{n+1} = g(x_n)$, 不妨设 $x_2 \geq x_1$, 则 $x_3 = g(x_2) \geq g(x_1) = x_2$, 一直递推下去可知 $x_{n+1} \geq x_n$; 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = g(x_2) \leq g(x_1) = x_2$, 一直递推下去可知 $x_{n+1} \leq x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 单调有界必收敛. □

0.1.6 杂题

题目 14. 求解下列问题:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n}, k \in \mathbf{R}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n}, \alpha \in \mathbf{R}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

(4) $a_1 = \beta > 0, a_{n+1} = \sqrt{\beta + a_n}$, 判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是否存在, 并给出理由和极限值 (如极限存在).

解: (1) $k \leq 0$ 易证, 当 $k > 0$ 时,

法一: 事实上, 由泰勒展开, 取 $m = [k] + 2$ 易得 $e^n > \frac{n^m}{m!}$, 那么:

$$0 < \frac{n^k}{e^n} \leq \frac{m!}{n^{m-k}} < \frac{M}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (40)$$

法二: 我们还能使用洛必达法则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n/k}} \right)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{n/k}} \right)^k = 0 \quad (41)$$

综上, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n} = 0$.

(2) 由 $n\alpha - 1 \leq [n\alpha] \leq n\alpha$, 可知:

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{[n\alpha]}{n} \leq \alpha \quad (42)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$.

(3) 使用 Stolz 定理即可.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (43)$$

(4) 取 $a = \frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2} > 1$, 且满足 $a^2 = a + \beta$, 则:

$$|a_{n+1} - a| = \left| \sqrt{\beta + a_n} - a \right| = \left| \sqrt{\beta + a_n} - \sqrt{a + \beta} \right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{\beta + a_n} + \sqrt{a + \beta}} \quad (44)$$

记 $C = \sqrt{\beta + a_n} + \sqrt{a + \beta}$, 则 $C > \sqrt{a + \beta} > \sqrt{1 + \beta} > 1$, 故 $|a_{n+1} - a| < \frac{1}{C}|a_n - a|$.

由压缩映射原理, 知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

0.1.7 压缩映射-进阶

推论 1: 二阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果满足

$$|a_n - a| \leq p|a_{n-1} - a| + q|a_{n-2} - a| \quad (45)$$

其中 $p, q > 0 \wedge p + q < 1$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 假设

$$|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \leq k(|a_{n-1} - a| + \lambda|a_{n-2} - a|) \quad (46)$$

得到方程组:

$$\begin{cases} k\lambda = q \\ k - \lambda = p \end{cases} \quad (47)$$

随便取一对解即可, 这里取 $k = \frac{\sqrt{p^2+4q+p}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{p^2+4q-p}}{2}$.

于是如此迭代, 便得到:

$$|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \leq k(|a_{n-1} - a| + \lambda|a_{n-2} - a|) \quad (48)$$

$$\leq k^2(|a_{n-2} - a| + \lambda|a_{n-3} - a|) \quad (49)$$

$$\leq \cdots \quad (50)$$

$$\leq k^{n-1}(|a_1 - a| + \lambda|a_0 - a|) \quad (51)$$

下面我们证明 $k < 1$, 也即

$$\frac{\sqrt{p^2+4q+p}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{p^2+4q} < 2-p \Leftrightarrow p^2+4q < 4-4p+p^2 \Leftrightarrow p+q < 1 \quad (52)$$

设于是令 $n \rightarrow \infty$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a|) = 0 \quad (53)$$

由于

$$0 \leq |a_n - a| \leq |a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \quad (54)$$

$$0 \leq |a_{n-1} - a| \leq \frac{1}{\lambda}|a_n - a| + |a_{n-1} - a| \quad (55)$$

因此我们可以知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.

从上述推导过程中可以看到, 其实也可以允许 p, q 小于 0 的, 但是要增加条件. 即一方面求根公式时, 根式下方的东西要大于等于 0, 即 $p^2 + 4q \geq 0$, 另一方面 $p < 2$, 且 $q \neq 0$. \square

推论 2: 高阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a| \quad (56)$$

其中 $\sum_{i=1}^m p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

使用连续函数的介质性解特征方程即可.

证明详见: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/1961736760292796066>.

题目 15. 设 $x_0 \in (1, \frac{3}{2}), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$, 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1 < x_n \leq 4$ 假设 $\{x_n\}$ 极限存在为 $x \geq 1$, 则 $x = \sqrt{x} + \frac{x}{2}$, $x = 0$ (舍去) 或 $x = 4$.

由于:

$$|x_{n+1} - x| = \left| \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} - \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right| \leq |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (57)$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (58)$$

$$< \frac{1}{3}|x_n - x| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (59)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 2$.

0.1.8 关于不动点的再讨论

对于压缩映射-3 中定义的 $x_{n+1} = f(x_n)$. 如果我们能够得到 $f(x)$ 的单调性, 那么我们能否得到数列 $\{x_n\}$ 的单调性呢? 答案是肯定的! 下面我们具体分析一下:

如果 $f'(x) \geq 0$, 即 $f(x)$ 单调递增, 那么假设 $x_2 \geq x_1$, 则有 $x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2$, 以此类推, 可得到 $x_{n+1} \geq x_n$; 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = f(x_2) \leq f(x_1) = x_2$, 以此类推, 可得到 $x_{n+1} \leq x_n$. 即如果已经知道 $f(x)$ 单调递增, 那么数列 $\{x_n\}$ 的单调性之与前两项 x_1 和 x_2 的大小有关了.

如果 $f'(x) \leq 0$, 即 $f(x)$ 单调递减, 那么假设 $x_2 \geq x_1$, 则有 $x_3 = f(x_2) \leq f(x_1) = x_2$, $x_4 = f(x_3) \geq f(x_2) = x_3$, 以此类推, 可知 $x_{2n} \geq x_{2n-1}$, $x_{2n+1} \leq x_{2n}$. 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2$, $x_4 = f(x_3) \leq f(x_2) = x_3$ 以此类推, 可知 $x_{2n} \leq x_{2n-1}$, $x_{2n+1} \geq x_{2n}$.

更进一步, 如果我们知道了 x_1 和 x_3 之间的大小关系, 假设 $x_1 \leq x_3$, 那么 $x_4 = f(x_3) \leq f(x_1) = x_2$, $x_5 = f(x_4) \geq f(x_2) = x_3$, 不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递减, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递增. 若 $x_1 \geq x_3$, 那么 $x_4 = f(x_3) \geq f(x_1) = x_2$, $x_5 = f(x_4) \leq f(x_2) = x_3$, 不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递减.

事实上, 由于 $f(x)$ 单调递减, 那么 $F(x) = f(f(x))$ 单调递增, 那么 $F(x_n) = f(f(x_n)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$, 使用刚才的结论可知数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的单调性和 x_1 与 x_3 的大小有关.

因此我们有以下推论:

推论 3

设 a 为 f 的不动点, f 在 $x = a$ 点连续, 在 $U(a, r)$ 中严格单调递增, 且在 $(a-r, a)$ 上有 $f(x) > x$, 在 $(a, a+r)$ 上有 $f(x) < x$, 证明: 若 $a_{n+1} = f(a_n)$, 且 $a_1 \in U^o(a, r)$, 则 $\{a_n\}$ 严格单调, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 首先, $x = a$ 为 f 在 $U(a, r)$ 上的唯一不动点, 设 $a_1 \in (a-r, a)$, 则 $a_2 = f(a_1) < f(a) = a$, 故 $a_1, a_2 \in (a-r, a)$, 则 $a_2 = f(a_1) > a_1$, 即 $a_1 < a_2 < a$. 以此类推可知 $a_n < a$, 且 $\{a_n\}$ 单调递增并有上界, 且极限为 a (因为唯一不动点).

同理, 设 $a_1 \in (a, a+r)$, 则 $a_2 = f(a_1) > f(a) = a$, 故 $a_1, a_2 \in (a, a+r)$, 则 $a_2 = f(a_1) < a_1$, 即 $a < a_2 < a_1$. 以此类推可知 $a_n > a$, 且 $\{a_n\}$ 单调递减并有下界, 且极限为 a . \square

题目 16. 设 $x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. 问: b 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛? 并求极限值.

解: 首先解 $x = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, 得 $x = 1$, 因此数列 $\{x_n\}$ 如果收敛, 只能以 1 为极限. 令 $f = \frac{1}{2}(x^2 + 1), f'(x) = x$, 故 f 在 $x < 0$ 单调递减, 在 $x \geq 0$ 单调递增. 在 $(0, 1)$, 有 $f(x) < 1$, 在 $(1, +\infty)$, 有 $f(x) > 1$.

又由于 $x_1 = b$ 和 $x_1 = -b$ 对极限没有影响, 因此可以假定 $b \geq 0$, 最后再对称区间即可, 那么 $x_n \geq 0$.

当 $0 \leq b \leq 1$ 时, $1 \geq x_2 = \frac{b^2+1}{2} \geq b = x_1$, $1 \geq x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2$, 归纳可知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 故收敛, 且以 1 为极限.

当 $b > 1$ 时, $x_n > 1$, 但 $x_2 = \frac{b^2+1}{2} > b = x_1$, 以此递推, 仍能得到 $\{x_n\}$ 单调递增, 但 $x_n > 1$, 故 $\{x_n\}$ 不会以 1 为极限, 那么 $\{x_n\}$ 发散.

因此 $-1 \leq b \leq 1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限值为 1, 其余情况发散.

0.2 实数的完备性

直观上，实数完备性意味着实数轴上没有“间隙”（以理查德·戴德金的说法）。这是实数区别于有理数的特点，有理数在数轴上是有间隙的，即无理数。在十进制计数法下，实数的完备性等价于：实数与一个十进制小数表示一一对应。一般情况下我们认为实数的完备性主要有 8 个定理（当然也有人说 10 个，参见<https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870>），其中 6 个最为重要（和书上一致），下面我将叙述 8 个定理的版本，并将所有定理一一罗列出来：

0.2.1 实数完备性定理

定义 4: Dedekind 分割

将实数集 \mathbf{R} 分为两个子集 S 和 T ，且满足：

- (1) $S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$;
- (2) $\mathbf{R} = S \cup T$;
- (3) $\forall x \in S, \forall y \in T$ ，总有 $x < y$ ，其中 S 称为左集， T 称为右集。

由上述定义得到的对实数集 \mathbf{R} 的一个分割称为 **Dedekind 分割**，记作 (S, T) 。

定理 10: Dedekind 定理

实数集 \mathbf{R} 的任一 Dedekind 分割 (S, T) ，都唯一地确定一个实数（称为中介数或中介点），它或者是 S 的最大数（此时 T 中无最小数），或者是 T 的最小数（此时 S 中无最大数）。

定理 11: 确界原理

对于非空数集 S ，如果它有上界，则必有上确界；如果它有下界，则必有下确界。

定理 12: 致密性定理

有界数列必有收敛子列。

定理 13: 单调有界定理

单调（从某项开始单调即可）且有界（递增只需有上界；递减只需有下界）的数列必收敛。

定理 14: Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是： $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ ，对 $\forall m, n > N$ ，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 。

定理 15: 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

那么在 \mathbf{R} 中唯一地存在一点 ξ , 使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad (60)$$

定义 5: 聚点 (极限点) - 1

实轴上任一有界无限点集 S 至少含有一个聚点 ξ .

定义 6: 聚点 (极限点) - 2

对于点集 S , 若点 ξ 的任何 ε 邻域都含有 S 中异于 ξ 的点, 即 $U^\circ(\xi, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, 则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 7: 聚点 (极限点) - 3

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$, 则其极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

定理 16: Weierstrass 聚点定理

\mathbf{R}^n 中任何有界无穷点集至少有一个聚点.

定义 8: 开覆盖

对于一个数集 S , 以及由一些互不相等 (可有非空交集) 的开区间 (不为无穷区间) 组成的点集

$$H = \bigcup_{k=1}^n S_i \quad (61)$$

若满足 $S \subset H$, 则称 H 为 S 的一个开覆盖. 当 n 为有限数时, 称为有限开覆盖, $n = \infty$ 时称为无限开覆盖.

定理 17: Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖.

一般情况下, 证明有限覆盖定理需要使用反证法, 而从有限覆盖定理证明其它定理则需要根据一些性质构造开覆盖. 而使用闭区间套定理证明某些性质时, 往往采用二分法分割区间.

题目 17. 证明对任意实数 α , 均存在一个有理数列 a_n , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

证明.

$$a_n = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \quad (62)$$

□

题目 18. 证明有理数集 \mathbb{Q} 是不完备的.

证明. 同上题, 如果我们取 $\alpha = \pi$, 虽然 a_n 趋向于 π , 但在 \mathbb{Q} 里找不到一个数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$. □

由于实数完备性等价定理较多, 难度较大, 因此不可能把所有的用法和证明详细写出来. 下面, 我仅列举一些重要的题目, 以示实数完备性定理的应用:

题目 19. 用闭区间套定理证明零点定理.

[分析]: 零点定理, 指的是连续函数 $f(x)$ 如果在闭区间 $[a, b]$ 的端点处取值异号, 那么 f 在区间内至少含有一个零点. 因此, 我们想办法找到某一点, 使得 $f^2(\xi) \leq 0$, 那么就能得到 $f(\xi) = 0$.

证明. 设 $f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$, 那么我们取 $a_1 = a, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$, 为第一个闭区间. 取 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, 若 $f(c_1) = 0$, 则已经得证, 否则可以在 $f(a)f(c_1)$ 和 $f(c_1)f(b)$ 中找到一个小于 0 的表达式, 不妨设 $f(a)f(c_1) < 0$, 取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, I_1 = [a_2, b_2]$, 依次类推. 如果找不到一个 $f(c_i) = 0$, 那么我们可以得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$;
- (3) $f(a_n)f(b_n) < 0$.

那么由闭区间套定理知, 唯一存在一个点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

于是

$$f^2(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \quad (63)$$

□

也即 $f(\xi) = 0$.

题目 20. 用闭区间套定理证明聚点定理.

证明. 由于 S 为有界点集, 那么存在 $M > 0$, 使得 $S \subset [-M, M]$. 记 $a_1 = -M, b_1 = M$. 仿照上题取 $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个含有 S 中无穷个点, 可记为 $[a_2, b_2]$. 同理, 一直这样取下去, 我们可以得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 满足:

$$(1)[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n];$$

$$(2)\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{n-1}} = 0;$$

这是一个闭区间套, 由闭区间套定理, 知存在一点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由极限的定义, 知存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$. 由定义知 ξ 为 S 的一个聚点. \square

题目 21. 用闭区间套定理证明有限覆盖定理.

解: 反证法: 假设不能用 H 的有限项覆盖 $[a, b]$. 即 $a_1 = a, b_1 = b$, 同理取 $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个不能用 H 的有限项覆盖 $[a, b]$, 可记为 $[a_2, b_2]$. 同理, 一直这样取下去, 我们可以得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 满足:

$$(1)[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n];$$

$$(2)\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0;$$

这是一个闭区间套, 由闭区间套定理, 知存在一点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由于 H 是一个开覆盖, 那么必存在一个区间 $(\alpha, \beta) \in H$, 使得 $\xi \in (\alpha, \beta)$. 由极限的定义, 知存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$. 这与 $[a_n, b_n]$ 的选取矛盾! 故原命题成立.

题目 22. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

证明. 设 $f(x) \in C[a, b]$. 首先, 对于闭区间上的一点 $x_0 \in [a, b]$, 我们有 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_{x_0})$ 是有界的 (根据极限的定义可知), 记界为 M_{x_0} . 当 $x \in U(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]$ 时, 有 $|f(x)| \leq M_{x_0}$. 令

$$H = \{U(x_0, \delta_{x_0}) \mid |f(x)| \leq M_{x_0}, x \in U(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]\} \quad (64)$$

那么 H 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故存在一个有限子覆盖

$$H' = \{U(x_i, \delta_{x_i}) \mid U(x_i, \delta_{x_i}) \in H, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (65)$$

取 $M = \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}\}$, 则 $|f(x)| \leq M$. \square