目录

0.1 极限与连续

0.1.1 单调有界定理

题目 1. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

解:

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\overbrace{1\cdots1}^{n-2\text{个}1}}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}\to1(n\to\infty)$$

定理 1: 单调有界定理

有界的单调数列必收敛.

题目 2. 证明单调有界定理.

证明. 不妨设 a_n 单调递增，$a=\sup a_n$. 则由上确界的定义立知 $a_n\leqslant a$，且 $\forall\varepsilon>0,a-\varepsilon<a$，故存在 $N>0$，使得 $a_N>a-\varepsilon$.

故 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 对 $\forall n>N$, 有：

$$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant a<a+\varepsilon \tag{1}$$

故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. □

题目 3. 若单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛.(注意与单调有界定理相比较)

证明. **法一:**不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增,只需证明 $\{a_n\}$ 有上界即可. 设子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛,则 $\exists M>0,s.t.a_{n_k}<M$. 但对任意的 k，由于 $k\leqslant n_k$，故 $a_k\leqslant a_{n_k}<M$.

因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

法二: 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 设 $\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=a$. 故 $\forall\varepsilon>0,\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$$

当 $n>n_{K+1}$ 时，存在 $m>n>K+1$，使得 $n<m\leqslant n_m$. 故 $a_{n_{K+1}}<a_n\leqslant a_{n_m}$，也即：

$$-\varepsilon<a_{n_{K+1}}-a<a_n-a\leqslant a_{n_m}-a<\varepsilon$$

也即 $\{a_n\}$ 收敛. □

0.1.2 Stolz 定理

定理 2： Stolz 定理

1.$(\frac{*}{\infty})$ 设 x_n(严格) 单调递增趋于无穷大，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$$

2.$(\frac{0}{0})$ 设 x_n(严格) 单调递减趋于 0，且 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$$

注: 极限等式成立的前提，除了对单调性和极限有要求外，还要求 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ $(*)$ 必须存在（包括非正常极限）. 满足题干条件外，当 $(*)$ 极限为 $+\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=+\infty$；当 $(*)$ 极限为 $-\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=-\infty$.

注: 不能认为 $(*)$ 式极限不存在，则左式极限一定不存在. 例如取 $y_n=(-1)^n, x_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$, 但 $\frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{(n+1)-n}=2\cdot(-1)^{n+1}$ 极限不存在.

注: 在满足特定的条件下才有 Stolz 逆定理 (即使用左式极限推右式). 例如，当 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 和 $(*)$ 极限均存在时，我们可以利用 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 的极限计算 $(*)$ 的极限. 当然，Stolz 逆定理还有一些其它的版本，但比较复杂，目前用不到.

题目 4. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{(n)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}a_n=a \tag{2}$$

注: 当 a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 也成立.

题目 5. 若 $a_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$.

解: 1. 当 $a=0$ 时，有

$$0\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty) \tag{3}$$

2. 当 $a\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n)}{n}}=e^{\ln a}=a \tag{4}$$

题目 6. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}$$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n+1}k^{2020}-\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)} \tag{5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2020}} \tag{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}=\int_0^1 x^{2020}dx=\frac{1}{2021} \tag{7}$$

题目 7. 设 $x_{n+1}=\sin x_n, x_1\in(0,\pi)$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n$

解: 显然 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0，故：

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}} \tag{8}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=3 \tag{9}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$$

注: 读者可思考一下，在进行计算时，为什么使用 $\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$，而不是 $\frac{x_n^2}{\frac{1}{n}}$？

注: 本题还可以以“加边”，即再次使用 Stolz 定理，可以求得 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)=\frac{3}{10}$. 不过不要先着急求，我们再看一个稍微“复杂”一点的题目.

题目 8. 设 $x_1=1, x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$，求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n}$$

解: 第一步，我们首先求 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{2n}}$. 由于 x_n 单调递增到 ∞[1]，因此我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+x_n}{2x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+\frac{1}{x_n}}{2x_n}=1 \tag{10}$$

[1] 单调易见，使用反证法可看出趋于无穷

我们得到一个很有用的结论：$x_n \sim \sqrt{2n}, n \to \infty$.

那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n})\ln n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}\right) - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{4} \tag{13}$$

注: 我们观察计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ 的步骤，发现有多处使用了 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 的结果. 事实上，这是一种做题技巧。

具体来说，我们要使用 Stolz 定理，尤其是递推数列算一个分式的极限的时候，我们尽可能要消去 n(不包括数列 $\{x_n\}$ 中的 n)，换句话说，就是统一变量。把含有 n 的式子尽量化为 $a_n + kn$ 的形式，且也不是分式，这就解释了为什么刚才我们不使用 $\frac{x_n^2}{\frac{1}{n}}$ 来计算.

另外，求解 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 也很自然了. 一方面是使用有理化，把 $\sqrt{2n}$ 变为 $2n$ 时要用到，另一方面把 $\frac{1}{n}$ 化为 $\frac{2}{x_n^2}$ 要用到.

把所有显含 n 的式子转化为数列后，我们可以使用递推关系式统一变量，比如均转化为 x_n. 这样，再使用海涅归结原则，我们只需求解其对应的函数极限即可.

0.1.3 Cauchy 收敛准则

定理 3： 数列收敛的 Cauchy 准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \tag{14}$$

上述定理亦可等价为：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $n > N$，和一切 $p \in N^+$，均有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \tag{15}$$

题目 9. 若对任意的 $p \in N^+$，都有 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$，那么 $\{a_n\}$ 收敛吗？

解: $\{a_n\}$ 不一定收敛，比如取 $a_n = \sqrt{n}$，那么 $0 \leqslant |a_{n+p} - a_n| = |\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} \to 0 (n \to \infty)$

注: 极限不一定存在的原因：题目表述和 Cauchy 收敛定理并不等价，题目是指固定一个 p 后，我们能证明 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$，即找到一个 $N = N(p, \varepsilon)$；而 Cauchy 收敛准则则是固定了 $N = N(\varepsilon)$，再选取 p，此时 N 已经和 p 无关了，因此 Cauchy 收敛准则的要求更高一些.

注: 将 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$ 改为 $|a_{n+p} - a_n| \rightrightarrows 0$，即对于 $n \to \infty$ 时，关于 p 一致收敛. 则可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

定义 1： 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^o(x_0)$ 有定义，如果满足：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{16}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

定理 4： 函数极限存在的柯西收敛准则

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^o(x_0,\delta')$ 有定义，我们说它在 $x = x_0$ 处收敛，如果对于 $\varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta'$，使得 $\forall x', x'' \in U^o(x_0,\delta)$，有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{17}$$

0.1.4 一致连续

定义 2： 一致连续

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$，若对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得任意 $x', x'' \in I$，只要 $|x'-x''| < \delta$，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{18}$$

注: 从直观上来看，柯西收敛准则和一致连续的定义很相似。它们主要的区别是，柯西收敛准则只考虑了 x_0 那一点的性质，而一致连续则考虑了全局的性质.

定理 5

闭区间上的连续函数一致连续.

定理 6： 一致连续的可加性

设函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[b,c](a < b < c)$ 一致连续，则 f 在 $[a,c]$ 上一致连续. 且当 $c = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 也成立 (相应区间括号要进行修改).

题目 10. 若 $n \geqslant 2, n \in N^+$, 证明:

(1) 函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续;

(2) 函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致连续.

证明. 首先，我们有

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{19}$$

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$，对任意 $x_1 \geqslant q1, x_2 \geqslant q1$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有：

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{x_1 - x_2}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_1^{\frac{n-2}{n}} x_2 + \cdots + x_2^{\frac{n-2}{n}} x_1 + x_2^{\frac{n-1}{n}}}\right| \tag{20}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}|x_1 - x_2| < \varepsilon \tag{21}$$

这说明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续，又由于 f 在 $[0, 1]$ 连续，故一致连续，因此函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall 0 < \delta < \frac{1}{2}$, 存在 $x_1 = \frac{1}{\delta^2} > 1, x_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta^2} > 1$，即使 $|x_1 - x_2| < \delta$，有：

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1 x_2^{n-2} + x_2^{n-1}) > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{n}{\delta^2} > n > \varepsilon \tag{22}$$

故函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续. □

注: 问题 (2) 当然也可取 $x_m = m + \frac{1}{m}, y_m = m$, 即使 $\lim_{m\to\infty}(x_m - y_m) = 0$, 但 $|x_m^n - y_m^n| > \frac{1}{m} \cdot mn > \varepsilon$.

定义 3: Lipschitz 连续

对于定义在区间 I 上的实值函数 $f(x)$，如果 $\forall x_1, x_2 \in I, \exists L > 0$ 使得：

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| \tag{23}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 连续.

题目 11. 证明 Lipschitz 连续的函数一致连续.

证明. Lipschitz 连续比一致连续条件要强，我们只需书写 Lipschitz 连续的定义，并限制 $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$，那么有：

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \tag{24}$$

得证. □

0.1.5 压缩映射定理

定理 7： 压缩映射 1

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$a \in \mathbf{R}, r \in (0,1)$，若从某项开始，有：

$$|a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a| \tag{25}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且以 a 为极限.

证明. 假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始，有 $|a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a|$，那么：

$$0 \leqslant |a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a| \leqslant r^2|a_{n-2} - a| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N}|a_N - a| \to 0(n \to \infty) \tag{26}$$

得证. □

定理 8： 压缩映射 2

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$r \in (0,1)$，若从某项开始，有：

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}| \tag{27}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先，类似地假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始，有 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}|$，那么 $\forall n > N, p \in \mathbf{N}^+$，我们有：

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N}|a_{N+1} - a_N| \tag{28}$$

以及三角不等式，得到：

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| && (29)\\
&\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| && (30)\\
&\leqslant \left(r^{n-N+p+1} + r^{n-N+p} + \cdots + r^{n-N}\right)|a_{N+1} - a_N| && (31)\\
&= \frac{r^{n-N}(1 - r^{p+2})}{1 - r}|a_{N+1} - a_N| && (32)\\
&< \frac{r^{n-N}}{1 - r}|a_{N+1} - a_N| \to 0(n \to \infty) && (33)
\end{aligned}$$

得证. □

定理 9： 压缩映射 3

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$y=f(x)$ 为定义在区间 I 的可微函数，$x_n \in I$ 且 $x_{n+1}=f(x_n)$. 若存在 $r\in(0,1)$，使得：

$$|f'(x)| \leqslant r < 1 \quad , \quad (x \in I) \tag{34}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且以 $f(x)=x$（其所有的解称之为**不动点**）的某个解为极限.

证明. 显然 $|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| = |f'(\xi)|\cdot|x_n-x_{n-1}| \leqslant r|x_n-x_{n-1}|$. 然后使用压缩映射 1 定理即得 $\{x_n\}$ 极限存在.

另外，对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边同时取极限，得 $f(x)=x$，得证. □

注: 当压缩常数 $r=1$ 时，上面三个定理一般都不成立，一个易见的例子是，取 $f(x)=x, x_n=n$.

题目 12. 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$, $|f'(x)|<1$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $x_1\in[a,b]$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，且不依赖于 x_1.

[分析]: 我们发现此时压缩常数为 1，无法使用压缩映射了. 而且 $|f'(x)|$ 不一定有连续性，所以不一定有最大值，因此我们需要想办法找到一个连续的函数 $H(x)$，使得 $\max_{x\in[a,b]}|H(x)|<1$ 恒成立.

证明. 令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(a)\geqslant 0, g(b)\leqslant 0$，则 $\exists x_0\in[a,b]$, $s.t.\ f(x_0)=x_0$. 下面我们证明 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限. 取

$$|H(x)| = \begin{cases} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(\xi)| < 1 & , \ x\in[a,b]\backslash\{x_0\} \\ |f'(x_0)| & , \ x = x_0 \end{cases} \tag{35}$$

易知 $|H(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $|H(x)|<1$，那么取 $r=\max_{x\in[a,b]}H(x)<1$，因此：

$$|x_{n+1}-x_0| = |f(x_n)-f(x_0)| \leqslant r|x_n-x_0| \tag{36}$$

注意上述不等式是使用 $|H(x)|$ 的性质推出的，而不是 Lagrange 中值定理. □

题目 13. 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$，且满足 $L=1$ 的 Lipschitz 连续，若：

$$x_1\in[a,b]\ ,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left[x_n+f(x_n)\right] \tag{37}$$

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

证明. 首先，我们有 $a\leqslant x_n\leqslant b$，以及：

$$x-y \leqslant f(x)-f(y) \leqslant y-x\ ,\ y\geqslant x \tag{38}$$

令 $g(x)=\frac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$，对 $\forall y\geqslant x$，有：

$$g(y)-g(x)=\frac{y-x-[f(x)-f(y)]}{2}\geqslant 0 \tag{39}$$

故 $g(x)$ 单调递增. 由 $x_{n+1}=g(x_n)$，不妨设 $x_2\geqslant x_1$，则 $x_3=g(x_2)\geqslant g(x_1)=x_2$，一直递推下去可知 $x_{n+1}\geqslant x_n$；若 $x_2\leqslant x_1$，则 $x_3=g(x_2)\leqslant g(x_1)=x_2$，一直递推下去可知 $x_{n+1}\leqslant x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 单调有界必收敛. □

0.1.6 杂题

题目 14. 求解下列问题：

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n},k\in\mathbf{R}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n},\alpha\in\mathbf{R}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$$

(4)$a_1=\beta>0,a_{n+1}=\sqrt{\beta+a_n}$，判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 是否存在，并给出理由和极限值 (如极限存在).

解: (1)$k\leqslant 0$ 易证，当 $k>0$ 时，

法一：事实上，由泰勒展开，取 $m=\lfloor k\rfloor+2$ 易得 $e^n>\frac{n^m}{m!}$，那么：

$$0<\frac{n^k}{e^n}\leqslant\frac{m!}{n^{m-k}}<\frac{M}{n}\to 0(n\to\infty) \tag{40}$$

法二：我们还能使用洛必达法则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n/k}}\right)^k=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k}{e^{n/k}}\right)^k=0 \tag{41}$$

综上，我们知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=0$.

(2) 由 $n\alpha-1\leqslant\lfloor n\alpha\rfloor\leqslant n\alpha$，可知：

$$\alpha-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}\leqslant\alpha \tag{42}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}=\alpha$.

(3) 使用 Stolz 定理即可.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \tag{43}$$

(4) 取 $a=\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}>1$，且满足 $a^2=a+\beta$，则：

$$|a_{n+1}-a|=\left|\sqrt{\beta+a_n}-a\right|=\left|\sqrt{\beta+a_n}-\sqrt{a+\beta}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{\beta+a_n}+\sqrt{a+\beta}} \tag{44}$$

记 $C=\sqrt{\beta+a_n}+\sqrt{a+\beta}$, 则 $C>\sqrt{a+\beta}>\sqrt{1+\beta}>1$，故 $|a_{n+1}-a|<\frac{1}{C}|a_n-a|$.

由压缩映射原理，知 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

0.1.7 压缩映射-进阶

推论 1： 二阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果满足

$$|a_n-a|\leqslant p|a_{n-1}-a|+q|a_{n-2}-a| \tag{45}$$

其中 $p,q>0\land p+q<1$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

证明. 假设

$$|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a|\leqslant k(|a_{n-1}-a|+\lambda|a_{n-2}-a|) \tag{46}$$

得到方程组:

$$\begin{cases}k\lambda=q\\ k-\lambda=p\end{cases} \tag{47}$$

随便取一对解即可，这里取 $k=\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2},\lambda=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$.

于是如此迭代，便得到:

$$\begin{aligned}|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a|&\leqslant k(|a_{n-1}-a|+\lambda|a_{n-2}-a|) &(48)\\ &\leqslant k^2(|a_{n-2}-a|+\lambda|a_{n-3}-a|) &(49)\\ &\leqslant\cdots &(50)\\ &\leqslant k^{n-1}(|a_1-a|+\lambda|a_0-a|) &(51)\end{aligned}$$

下面我们证明 $k<1$，也即

$$\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2}<1\Leftrightarrow\sqrt{p^2+4q}<2-p\Leftrightarrow p^2+4q<4-4p+p^2\Leftrightarrow p+q<1 \tag{52}$$

设于是令 $n\to\infty$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a|\right)=0 \tag{53}$$

由于

$$0\leqslant|a_n-a|\leqslant|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a| \tag{54}$$

$$0\leqslant|a_{n-1}-a|\leqslant\frac{1}{\lambda}|a_n-a|+|a_{n-1}-a| \tag{55}$$

因此我们可以知道 $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

从上述推导过程中可以看到，其实也可以允许 p,q 小于 0 的，但是要增加条件. 即一方面求根公式时，根式下方的东西要大于等于 0，即 $p^2+4q\geqslant q0$，另一方面 $p<2$，且 $q\neq 0$。 □

推论 2： 高阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果满足

$$|a_n-a|\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i|a_{n-i}-a| \tag{56}$$

其中 $\sum_{i=1}^{m}p_i<1,p_i>0$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

使用连续函数的介质性解特征方程即可.

证明详见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/1961736760292796066.

题目 15. 设 $x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right),x_1=x_0^2,x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\frac{x_{n-1}}{2}$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1<x_n\leqslant 4$ 假设 $\{x_n\}$ 极限存在为 $x\geqslant 1$，则 $x=\sqrt{x}+\frac{x}{2}$，$x=0$(舍去) 或 $x=4$.

由于：

$$|x_{n+1}-x|=\left|\sqrt{x_n}+\frac{x_{n-1}}{2}-\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right|\leqslant|\sqrt{x_n}-\sqrt{x}|+\frac{1}{2}|x_{n-1}-x| \tag{57}$$

$$=\frac{|x_n-x|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}}+\frac{1}{2}|x_{n-1}-x| \tag{58}$$

$$<\frac{1}{3}|x_n-x|+\frac{1}{2}|x_{n-1}-x| \tag{59}$$

故 $\lim_{n\to\infty}x_n=x=2$.

0.1.8 关于不动点的再讨论

对于压缩映射-3 中定义的 $x_{n+1}=f(x_n)$. 如果我们能够得到 $f(x)$ 的单调性，那么我们能否得到数列 $\{x_n\}$ 的单调性呢？答案是肯定的！下面我们具体分析一下：

如果 $f'(x) \geqslant 0$，即 $f(x)$ 单调递增，那么假设 $x_2 \geqslant x_1$，则有 $x_3 = f(x_2) \geqslant f(x_1) = x_2$，以此类推，可得到 $x_{n+1} \geqslant x_n$；若 $x_2 \leqslant x_1$，则 $x_3 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = x_2$，以此类推，可得到 $x_{n+1} \leqslant x_n$. 即如果已经知道 $f(x)$ 单调递增，那么数列 $\{x_n\}$ 的单调性之与前两项 x_1 和 x_2 的大小有关了.

如果 $f'(x) \leqslant 0$，即 $f(x)$ 单调递减，那么假设 $x_2 \geqslant x_1$，则有 $x_3 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = x_2$，$x_4 = f(x_3) \geqslant f(x_2) = x_3$，以此类推，可知 $x_{2n} \geqslant x_{2n-1}$，$x_{2n+1} \leqslant x_{2n}$. 若 $x_2 \leqslant x_1$，则 $x_3 = f(x_2) \geqslant f(x_1) = x_2$，$x_4 = f(x_3) \leqslant f(x_2) = x_3$ 以此类推，可知 $x_{2n} \leqslant x_{2n-1}$，$x_{2n+1} \geqslant qx_{2n}$.

更进一步，如果我们知道了 x_1 和 x_3 之间的大小关系，假设 $x_1 \leqslant x_3$，那么 $x_4 = f(x_3) \leqslant f(x_1) = x_2$，$x_5 = f(x_4) \geqslant f(x_2) = x_3$，不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递减，$\{x_{2n+1}\}$ 单调递增. 若 $x_1 \geqslant qx_3$，那么 $x_4 = f(x_3) \geqslant qf(x_1) = x_2$，$x_5 = f(x_4) \leqslant f(x_2) = x_3$，不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递增，$\{x_{2n+1}\}$ 单调递减.

事实上，由于 $f(x)$ 单调递减，那么 $F(x) = f(f(x))$ 单调递增，那么 $F(x_n) = f(f(x_n)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$，使用刚才的结论可知数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的单调性和 x_1 与 x_3 的大小有关.

因此我们有以下推论：

推论 3

设 a 为 f 的不动点，f 在 $x = a$ 点连续，在 $U(a, r)$ 中严格单调递增，且在 $(a-r, a)$ 上有 $f(x) > x$，在 $(a, a+r)$ 上有 $f(x) < x$，证明：若 $a_{n+1} = f(a_n)$，且 $a_1 \in U^o(a, r)$，则 $\{a_n\}$ 严格单调，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

证明. 首先，$x = a$ 为 f 在 $U(a, r)$ 上的唯一不动点，设 $a_1 \in (a-r, a)$，则 $a_2 = f(a_1) < f(a) = a$，故 $a_1, a_2 \in (a-r, a)$，则 $a_2 = f(a_1) > a_1$，即 $a_1 < a_2 < a$. 以此类推可知 $a_n < a$，且 $\{a_n\}$ 单调递增并有上界，且极限为 a(因为唯一不动点).

同理，设 $a_1 \in (a, a+r)$，则 $a_2 = f(a_1) > f(a) = a$，故 $a_1, a_2 \in (a, a+r)$，则 $a_2 = f(a_1) < a_1$，即 $a < a_2 < a_1$. 以此类推可知 $a_n > a$，且 $\{a_n\}$ 单调递减并有下界，且极限为 a. □

题目 16. 设 $x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. 问：$b$ 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛？并求极限值.

解: 首先解 $x = \frac{1}{2}(x^2+1)$，得 $x = 1$，因此数列 $\{x_n\}$ 如果收敛，只能以 1 为极限. 令 $f = \frac{1}{2}(x^2+1)$，$f'(x) = x$，故 f 在 $x < 0$ 单调递减，在 $x \geqslant 0$ 单调递增. 在 $(0, 1)$，有 $f(x) < 1$，在 $(1, +\infty)$，有 $f(x) > 1$.

又由于 $x_1 = b$ 和 $x_1 = -b$ 对极限没有影响，因此可以假定 $b \geqslant 0$，最后再对称区间即可，那么 $x_n \geqslant 0$.

当 $0 \leqslant b \leqslant 1$ 时，$1 \geqslant qx_2 = \frac{b^2+1}{2} \geqslant qb = x_1$，$1 \geqslant qx_3 = f(x_2) \geqslant qf(x_1) = x_2$，归纳可知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，故收敛，且以 1 为极限.

当 $b > 1$ 时，$x_n > 1$，但 $x_2 = \frac{b^2+1}{2} > b = x_1$，以此递推，仍能得到 $\{x_n\}$ 单调递增，但 $x_n > 1$，故 $\{x_n\}$ 不会以 1 为极限，那么 $\{x_n\}$ 发散.

因此 $-1 \leqslant b \leqslant 1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛，且极限值为 1，其余情况发散.

0.1.9 函数形式的 Stolz 定理

除了数列，其实函数也有 Stolz 定理，不过不经常使用. 因此放到最后供查阅和有能力的同学学习.

定理 10：Stolz 定理的函数形式

- $\left(\frac{*}{\infty}\right)$ 若 $T>0$ 为常数，且满足：
  1. $g(x+T)>g(x)$，$\forall x\geqslant a$;
  2. $g(x)\to+\infty(x\to+\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.
- $\left(\frac{0}{0}\right)$ 若 $T>0$ 为常数，且满足：
  1. $0<g(x+T)<g(x)$，$\forall x\geqslant a$;
  2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

由上述定理，我们可以推出 Cauchy 定理：

定理 11：Cauchy 定理

若 f 在 $(a,+\infty)$ 内有定义, 且内闭有界，则

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geqslant c>0)$，当右边极限存在时成立.

证明. 1. 取 $g(x)=x$，$T=1$，则满足：

- $g(x+1)>g(x)$，$\forall x\geqslant a$;
- $g(x)\to+\infty(x\to+\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

因此我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

2. 首先，$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}}$. 又由于 $f(x)>0$，且满足函数的 Stolz 定理，可得：

$$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x+1))-\ln(f(x))}{x+1-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}\tag{60}$$

□

0.2 实数的完备性

直观上，实数完备性意味着实数轴上没有“间隙”（以理查德·戴德金的说法）。这是实数区别于有理数的特点，有理数在数轴上是有间隙的，即无理数。在十进制计数法下，实数的完备性等价于：实数与一个十进制小数表示一一对应。一般情况下我们认为实数的完备性主要有 8 个定理 (当然也有人说 10 个，参见https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870)，其中 6 个最为重要 (和书上一致)，下面我将叙述 8 个定理的版本，并将所有定理一一罗列出来：

0.2.1 实数完备性定理

定义 4： Dedekind 分割

将实数集 $\mathbf{R}$ 分为两个子集 S 和 T，且满足：

(1)$S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$;

(2)$\mathbf{R} = S \cup T$;

(3)$\forall x \in S, \forall y \in T$，总有 $x < y$，其中 S 称为左集，T 称为右集.

由上述定义得到的对实数集 $\mathbf{R}$ 的一个分割称为 **Dedekind 分割**，记作 (S, T).

定理 12： Dedekind 定理

实数集 $\mathbf{R}$ 的任一 Dedekind 分割 (S, T)，都唯一地确定一个实数 (称为中介数或中介点)，它或者是 S 的最大数 (此时 T 中无最小数)，或者是 T 的最小数 (此时 S 中无最大数).

定理 13： 确界原理

对于非空数集 S，如果它有上界，则必有上确界；如果它有下界，则必有下确界.

定理 14： 致密性定理

有界数列必有收敛子列.

定理 15： 单调有界定理

单调（从某项开始单调即可）且有界（递增只需有上界；递减只需有下界）的数列必收敛.

定理 16： Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

定理 17： 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

那么在 $\mathbf{R}$ 中唯一地存在一点 ξ，使得

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \tag{61}$$

定义 5： 聚点（极限点）- 1

实轴上任一有界无限点集 S 至少含有一个聚点 ξ.

定义 6： 聚点（极限点）- 2

对于点集 S，若点 ξ 的任何 ε 邻域都含有 S 中异于 ξ 的点，即 $U^o(\xi, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 7： 聚点（极限点）- 3

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$，则其极限 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

定理 18： Weierstrass 聚点定理

$\mathbf{R}^n$ 中任何有界无穷点集至少有一个聚点.

定义 8： 开覆盖

对于一个数集 S，以及由一些互不相等（可有非空交集）的开区间（不为无穷区间）组成的点集

$$H = \bigcup_{k=1}^{n} S_i \tag{62}$$

若满足 $S \subset H$，则称 H 为 S 的一个开覆盖. 当 n 为有限数时，称为有限开覆盖，$n = \infty$ 时称为无限开覆盖.

定理 19： Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖。

一般情况下，证明有限覆盖定理需要使用反证法，而从有限覆盖定理证明其它定理则需要根据一些性质构造开覆盖. 而使用闭区间套定理证明某些性质时，往往采用二分法分割区间.

0.2.2 例题

题目 17. 证明对任意实数 α，均存在一个有理数列 a_n，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

证明. 取 $a_n = \dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$ 即可. □

题目 18. 证明有理数集 $\mathbb{Q}$ 是不完备的.

证明. 同上题，如果我们取 $\alpha = \pi$，虽然 a_n 趋向于 π，但在 $\mathbb{Q}$ 里找不到一个数 p，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = p$. □

由于实数完备性等价定理较多，难度较大，因此不可能把所有的用法和证明详细写出来. 下面，我仅列举一些重要的题目，以示实数完备性定理的应用：

题目 19. 用闭区间套定理证明零点定理.

[分析]: 零点定理，指的是连续函数 $f(x)$ 如果在闭区间 $[a, b]$ 的端点处取值异号，那么 f 在区间内至少含有一个零点. 因此，我们想办法找到某一点，使得 $f^2(\xi) \leqslant 0$，那么就能得到 $f(\xi) = 0$.

证明. 设 $f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$，那么我们取 $a_1 = a, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$，为第一个闭区间. 取 $c_1 = \frac{a_1+b_2}{2}$，若 $f(c_1) = 0$，则已经得证，否则可以在 $f(a)f(c_1)$ 和 $f(c_1)f(b)$ 中找到一个小于 0 的表达式，不妨设 $f(a)f(c_1) < 0$，取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, I_1 = [a_2, b_2]$，依次类推. 如果找不到一个 $f(c_i) = 0$，那么我们可以得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$;

(3)$f(a_n)f(b_n) < 0$.

那么由闭区间套定理知，唯一存在一个点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$.

于是

$$f^2(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0 \tag{63}$$

□

也即 $f(\xi) = 0$.

题目 20. 用闭区间套定理证明聚点定理.

证明. 由于 S 为有界点集，那么存在 $M > 0$，使得 $S \subset [-M, M]$. 记 $a_1 = -M, b_1 = M$. 仿照上题取 $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个含有 S 中无穷个点，可记为 $[a_2, b_2]$. 同理，一直这样取下去，我们可以得到一列闭区间 $[a_n, b_n]$，满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2M}{2^{n-1}}=0$;

这是一个闭区间套，由闭区间套定理，知存在一点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由极限的定义，知存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$. 由定义知 ξ 为 S 的一个聚点. □

题目 21. 用闭区间套定理证明有限覆盖定理.

解: 反证法：假设不能用 H 的有限项覆盖 $[a,b]$. 即 $a_1=a,b_1=b$，同理取 $c_i=\frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1,c]$ 和 $[c,b_1]$ 中至少有一个不能用 H 的有限项覆盖 $[a,b]$，可记为 $[a_2,b_2]$. 同理，一直这样取下去，我们可以得到一列闭区间 $[a_n,b_n]$，满足：

(1)$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$;

这是一个闭区间套，由闭区间套定理，知存在一点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由于 H 是一个开覆盖，那么必存在一个区间 $(\alpha,\beta)\in H$，使得 $\xi\in(\alpha,\beta)$. 由极限的定义，知存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$. 这与 $[a_n,b_n]$ 的选取矛盾！故原命题成立.

题目 22. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

证明. 设 $f(x)\in C[a,b]$. 首先，对于闭区间上的一点 $x_0\in[a,b]$，我们有 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_{x_0})$ 是有界的（根据极限的定义可知），记界为 M_{x_0}. 当 $x\in U(x_0,\delta_{x_0})\cap[a,b]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M_{x_0}$. 令

$$H=\{U(x_0,\delta_{x_0})||f(x)|\leqslant M_{x_0}\ ,\ x\in U(x_0,\delta_{x_0})\cap[a,b]\}\tag{64}$$

那么 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故存在一个有限子覆盖

$$H'=\{U(x_i,\delta_{x_i})|U(x_i,\delta_{x_i})\in H,i=1,2,\cdots,n\}\tag{65}$$

取 $M=\max\{M_{x_1},M_{x_2},\cdots,M_{x_n}\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$. □

题目 23. 用致密性定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

[分析]: 致密性定理，指的是任何有界的数列必有收敛的子列. 如果采用正面直接证明法，我们不知道收敛数列的极限值，因此可能会遇到一些困难，故我们采用反证法.

证明. 反证法. 设 $f(x)\in C[a,b]$，但对任意 $M>0$，存在 $\{x_n\}\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|>M$.

取其收敛子列 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，则 $f(x_{n_k})\to f(x_0)(k\to\infty)$.[2]

那么由连续函数的局部有界性，知 $f(x_{n_k})$ 有界（否则不会收敛到 $f(x_0)$）. 但这与 $|f(x_{n_k})|>M$ 矛盾！故原命题得证. □

[2]由于 f 的连续性

0.3 上下极限

上限极限的用处非常大，只要数列有界，那么就有上下极限，因此可以通过上下极限求极限.

0.3.1 定义

上下极限的定义依附于聚点的定义，因此我们先介绍一下数列的聚点的定义：

定义 9： 数列的聚点

若数 a 的任一邻域含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

注: 这里指的是数列的项，而不是数字. 也就是说，如果 $x_n = 1$，那么 1 就是数列的聚点.

从聚点的定义可以看出，如果一个数列 $\{x_n\}$ 有极限 a，那么该极限一定是数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

那我们自然会问，如果数列极限不存在呢？比如非正常极限 ∞（无界），或者是有界的数列 $(-1)^n$ 等，我们又该如何处理呢？

我们首先讨论有界的数列. 依聚点的定义，我们知 $(-1)^n$ 有两个聚点 -1 和 1，$\sin\frac{n\pi}{4}$ 有五个聚点 $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$. 由于这些数列都是有界的，因此我们猜测有界的数列必有聚点，即使极限不存在. 事实也的确如此：

定理 20： 有界数列聚点存在和最值性

对于有界数列 $\{x_n\}$ 至少含有一个聚点，且存在最大聚点和最小聚点.

证明. 因数列有无穷多项，因此可以使用闭区间套定理，每次二分区间，选择含有无穷多项的区间 $[a_k, b_k]$，可得到一个闭区间套，故可知聚点存在.

下面证明最值性，对于最大聚点，只需在选择区间时，优先选择右侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取左边的区间，由此得到的为最大聚点. 若不然，还存在更大的聚点 $\xi' > \xi$，则取 $\delta = \frac{1}{3}(\xi' - \xi) > 0$，则在 $U(\xi', \delta)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项.[3]，但 n 充分大时，$U(\xi', \delta)$ 全部落在 $[a_n, b_n]$ 右侧，这与优先选取右侧区间步骤相矛盾，故 ξ 为最大区间.

对于最小聚点也同理，优先选择左侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取右边的区间，由此得到的为最小聚点. □

对于最大聚点和最小聚点，我们分别称为上极限和下极限.

定义 10： 上下极限

有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点 L 和最小聚点 l 分别称为上极限和下极限，并记作

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad , \quad l = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \tag{66}$$

因此有界数列一定有上下极限. 下面我们介绍一下上下极限的几个重要的定理，以便后续使用.

[3] 依聚点的定义可知.

定理 21：　上下极限不等式

对于有界数列 $\{x_n\}$，我们有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \tag{67}$$

证明. 依上下极限的选取可知该定理成立. □

定理 22：　数列收敛的充要条件

有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \tag{68}$$

证明. $(\Rightarrow)$ 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\{x_n\}$ 只有一个聚点 A[4]，故 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

$(\Leftarrow)$ 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = A$，由上下极限的选取，可知仅能选取一个聚点 A，但又由聚点的定义和数列收敛的定义，知 A 即为 $\{x_n\}$ 的极限值. □

定理 23：　上下极限的保不等式

设有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，且从某项起，有 $a_n \leqslant b_n$，则：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \quad , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \tag{69}$$

又若存在 $\alpha \leqslant \beta$，且从某项起，有 $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$，则：

$$\alpha \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \beta \tag{70}$$

注: 不要认为也满足 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$. 我们可以构造一个反例，令

$$a_n = \begin{cases} 1 & ,n\text{为奇数} \\ 0 & ,n\text{为偶数} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} 2 & ,n\text{为奇数} \\ 0.5 & ,n\text{为偶数} \end{cases} \tag{71}$$

虽然 $a_n \leqslant b_n$，但 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = 0$.

推论 4

对于有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，我们有：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, (a_n+b_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, (a_n+b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \tag{72}$$

[4] 数列收敛的等价定义

现在我们处理无界数列的情况. 我们发现，如果将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点，那么它也满足聚点的定义. 即 $+\infty, -\infty$ 可能是无界数列的聚点. 对于这样形成的上下极限，我们称之为非正常上下极限，记法和一般的上下极限类似.

定义 11： 非正常上下极限

假设 $+\infty$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限，$-\infty$ 为数列 b_n 的下极限，那么：

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty \quad , \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n = -\infty \tag{73}$$

在一般的讨论中，我们一般只讨论正常的上下极限，如非特别说明，下面考虑的上下极限均为有界数列的（正常）上下极限.

除此之外，上下极限还有另外一种定义：

定义 12： 上下极限确界定义

设 $\{x_n\}$ 为有界实数列，则有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} = \inf_n \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} \quad , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} = \sup_n \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} \tag{74}$$

注: 使用上确界数列不增（递减），下确界不减（递增）的性质可证上述等式成立.

注: 由上式可以看出，数列 $\{x_n\}$ 的上极限，就是 $\{x_k\}, k\geqslant n$ 的上确界的极限（上确界的下确界）；数列 $\{x_n\}$ 的下极限，就是 $\{x_k\}, k\geqslant n$ 的下确界的极限（下确界的上确界）.

0.3.2 Stolz 定理上限极限形式

除了极限形式的 Stolz 定理，也存在上下极限形式的 Stolz 定理.

定理 24： 上下极限形式的 Stolz 定理

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$. 若 $\{y_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$，则有：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \tag{75}$$

证明. 只需证明第一个不等式和第三个不等式即可. 下面仅证第三个不等式：

设 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = M$，则存在 $N, \varepsilon=\varepsilon(n)\to 0(n\to\infty)$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leqslant M+\varepsilon \Leftrightarrow x_{n+1}-x_n \leqslant (y_{n+1}-y_n)(M+\varepsilon)\ (\text{注意}y_n\text{严格单调}) \tag{76}$$

那么

$$\sum_{k=N}^{n}(x_{n+1}-x_n) \leqslant \sum_{k=N}^{n}(y_{n+1}-y_n)(M+\varepsilon) \Leftrightarrow x_{n+1}-x_N \leqslant (y_{n+1}-y_N)(M+\varepsilon) \tag{77}$$

因此

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \left(1-\frac{y_N}{y_{n+1}}\right)(M+\varepsilon)+\frac{y_N}{y_{n+1}} \leqslant M+k\varepsilon \tag{78}$$

两边同时取上极限，且由 ε 的任意性，得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \leqslant M = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. □

注: 也可以这样理解，如取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left(M+\frac{k}{n}\right) = M = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \tag{79}$$

0.3.3 上下极限的一些例题

上限极限虽然方便和实用，但是很容易出错，首先由前面几个定理和推论可以看出，整体的上（下）极限，并不等于分开的式子取上（下）极限之后再求和. 另外，我们再给出几个等式，并在下面给出一些上下极限的例题.

推论 5：上下极限等式

设 $\{x_n\}$ 为有界数列，则

- 加负号反转上下极限

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = -\varliminf_{n\to\infty}(-x_n) \quad , \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -\varlimsup_{n\to\infty}(-x_n) \tag{80}$$

- 若 $\{y_n\}$ 收敛，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{81}$$

- 当 $x_n \geqslant 0$ 时，有

$$\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\right)^2 = \varlimsup_{n\to\infty} x_n^2 \tag{82}$$

- 另外，当 $x_n > 0$ 且 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > 0$ 时，有：

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varliminf_{n\to\infty} x_n} \quad , \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} x_n} \tag{83}$$

题目 24. 设 $x_1>0, x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解: 首先，易见 $1 \leqslant x_n \leqslant 2$ $(n \geqslant 3)$. 设 L, l 分别为 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限，则

$$L = 1+\frac{1}{l} \quad , \quad l = 1+\frac{1}{L} \tag{84}$$

可知 $L=l$，则 $\{x_n\}$ 收敛，设收敛到 x，则 $x=1+\frac{1}{x}$，得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

题目 25. 有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

解: 首先 $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_{2n}\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ， $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_{2n}\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

设 $|a_n|$ 的上下极限分别为 L,l，那么：

$$\begin{aligned}
0=\overline{\lim_{n\to\infty}}|2a_n+a_{2n}| &\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(|2a_n|-|a_{2n}|)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|2a_n|+\underline{\lim_{n\to\infty}}(-|a_{2n}|) &(85)\\
&=\overline{\lim_{n\to\infty}}|2a_n|-\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_{2n}|) &(86)\\
&=\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|+\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|-\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_{2n}|)\right) &(87)\\
&\geqslant L &(88)
\end{aligned}$$

但 $L\geqslant 0$，因此只能 $L=l=0$，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.