

目录

0.1	极限与连续	2
0.1.1	单调有界定理	2
0.1.2	Stolz 定理	3
0.1.3	Cauchy 收敛准则	5
0.1.4	一致连续	6
0.1.5	压缩映射定理	8
0.1.6	杂题	10
0.1.7	压缩映射-进阶	11
0.1.8	关于不动点的再讨论	12
0.1.9	函数形式的 Stolz 定理	13
0.2	实数的完备性	15
0.2.1	实数完备性定理	15
0.2.2	例题	17
0.3	上下极限	19
0.3.1	定义	19
0.3.2	Stolz 定理上限极限形式	21
0.3.3	上下极限的一些例题	22
0.4	级数	30

0.1 极限与连续

0.1.1 单调有界定理

题目 1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

解:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \overbrace{1 \cdots 1}^{n-2 \text{个} 1}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

定理 1: 单调有界定理

有界的单调数列必收敛.

题目 2. 证明单调有界定理.

证明. 不妨设 a_n 单调递增, $a = \sup a_n$. 则由上确界的定义立知 $a_n \leq a$, 且 $\forall \varepsilon > 0, a - \varepsilon < a$, 故存在 $N > 0$, 使得 $a_N > a - \varepsilon$.

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall n > N$, 有:

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \quad (1)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

题目 3. 若单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.(注意与单调有界定理相比较)

证明. **法一:** 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增, 只需证明 $\{a_n\}$ 有上界即可. 设子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛, 则 $\exists M > 0, s.t. a_{n_k} < M$. 但对任意的 k , 由于 $k \leq n_k$, 故 $a_k \leq a_{n_k} < M$.

因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

法二: 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0$, 当 $k > K$ 时, 有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

当 $n > n_{K+1}$ 时, 存在 $m > n > K + 1$, 使得 $n < m \leq n_m$. 故 $a_{n_{K+1}} < a_n \leq a_{n_m}$, 也即:

$$-\varepsilon < a_{n_{K+1}} - a < a_n - a \leq a_{n_m} - a < \varepsilon$$

也即 $\{a_n\}$ 收敛. □

0.1.2 Stolz 定理

定理 2: Stolz 定理

1. $(\frac{*}{\infty})$ 设 x_n (严格) 单调递增趋于无穷大, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

2. $(\frac{0}{0})$ 设 x_n (严格) 单调递减趋于 0, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

注: 极限等式成立的前提, 除了对单调性和极限有要求外, 还要求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ (*) 必须存在 (包括非正常极限). 满足题干条件外, 当 (*) 极限为 $+\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$; 当 (*) 极限为 $-\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = -\infty$.

注: 不能认为 (*) 式极限不存在, 则左式极限一定不存在. 例如取 $y_n = (-1)^n, x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, 但 $\frac{(-1)^{n+1} - (-1)^n}{(n+1) - n} = 2 \cdot (-1)^{n+1}$ 极限不存在.

注: 在满足特定的条件下才有 Stolz 逆定理 (即使用左式极限推右式). 例如, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 和 (*) 极限均存在时, 我们可以利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 的极限计算 (*) 的极限. 当然, Stolz 逆定理还有一些其它的版本, 但比较复杂, 目前用不到.

题目 4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})}{(n) - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (2)$$

注: 当 a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 也成立.

题目 5. 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

解: 1. 当 $a = 0$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

2. 当 $a \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)}{n}} = e^{\ln a} = a \quad (4)$$

题目 6. 求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}}$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln \left(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}\right)} \quad (5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2020}} \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020} = \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021} \quad (7)$$

题目 7. 设 $x_{n+1} = \sin x_n, x_1 \in (0, \pi)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n$

解: 显然 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0, 故:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} \quad (8)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = 3 \quad (9)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$$

注: 读者可思考一下, 在进行计算时, 为什么使用 $\frac{n}{x_n^2}$, 而不是 $\frac{x_n^2}{n}$?

注: 本题还可以“加边”, 即再次使用 Stolz 定理, 可以求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n) = \frac{3}{10}$. 不过不要先着急求, 我们再看一个稍微“复杂”一点的题目.

题目 8. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, 求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$$

解: 第一步, 我们首先求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$. 由于 x_n 单调递增到 ∞ ¹, 因此我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} + x_n}{2x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n + \frac{1}{x_n}}{2x_n} = 1 \quad (10)$$

¹单调易见, 使用反证法可看出趋于无穷

我们得到一个很有用的结论: $x_n \sim \sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$.

那么:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}\right) - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{4} \quad (13)$$

注: 我们观察计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ 的步骤, 发现有多处使用了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 的结果. 事实上, 这是一种做题技巧.

具体来说, 我们要使用 Stolz 定理, 尤其是递推数列算一个分式的极限的时候, 我们尽可能要消去 n (不包括数列 $\{x_n\}$ 中的 n), 换句话说, 就是统一变量. 把含有 n 的式子尽量化为 $a_n + kn$ 的形式, 且也不是分式, 这就解释了为什么刚才我们不使用 $\frac{x_n^2}{n}$ 来计算.

另外, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 也很自然了. 一方面是使用有理化, 把 $\sqrt{2n}$ 变为 $2n$ 时要用到, 另一方面把 $\frac{1}{n}$ 化为 $\frac{2}{x_n^2}$ 要用到.

把所有显含 n 的式子转化为数列后, 我们可以使用递推关系式统一变量, 比如均转化为 x_n . 这样, 再使用海涅归结原则, 我们只需求解其对应的函数极限即可.

0.1.3 Cauchy 收敛准则

定理 3: 数列收敛的 Cauchy 准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (14)$$

上述定理亦可等价: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $n > N$, 和一切 $p \in \mathbb{N}^+$, 均有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad (15)$$

题目 9. 若对任意的 $p \in \mathbb{N}^+$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 那么 $\{a_n\}$ 收敛吗?

解: $\{a_n\}$ 不一定收敛, 比如取 $a_n = \sqrt{n}$, 那么 $0 \leq |a_{n+p} - a_n| = |\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

注: 极限不一定存在的原因: 题目表述和 Cauchy 收敛定理并不等价, 题目是指固定一个 p 后, 我们能证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 即找到一个 $N = N(p, \varepsilon)$; 而 Cauchy 收敛准则则是固定了 $N = N(\varepsilon)$, 再选取 p , 此时 N 已经和 p 无关了, 因此 Cauchy 收敛准则的要求更高一些.

注: 将 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$ 改为 $|a_{n+p} - a_n| \Rightarrow 0$, 即对于 $n \rightarrow \infty$ 时, 关于 p 一致收敛. 则可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

定义 1: 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 有定义, 如果满足:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (16)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

定理 4: 函数极限存在的柯西收敛准则

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta')$ 有定义, 我们说它在 $x = x_0$ 处收敛, 如果对于 $\varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta'$, 使得 $\forall x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (17)$$

0.1.4 一致连续

定义 2: 一致连续

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得任意 $x', x'' \in I$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (18)$$

注: 从直观上来看, 柯西收敛准则和一致连续的定义很相似. 它们主要的区别是, 柯西收敛准则只考虑了 x_0 那一点的性质, 而一致连续则考虑了全局的性质.

定理 5

闭区间上的连续函数一致连续.

定理 6: 一致连续的可加性

设函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a, b]$ 和 $[b, c]$ ($a < b < c$) 一致连续, 则 f 在 $[a, c]$ 上一致连续. 且当 $c = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 也成立 (相应区间括号要进行修改).

题目 10. 若 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$, 证明:

- (1) 函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续;
- (2) 函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续.

证明. 首先, 我们有

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (19)$$

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 对任意 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_1^{\frac{n-2}{n}}x_2 + \cdots + x_2^{\frac{n-2}{n}}x_1 + x_2^{\frac{n-1}{n}}} \right| \quad (20)$$

$$\leq \frac{1}{n}|x_1 - x_2| < \varepsilon \quad (21)$$

这说明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续, 又由于 f 在 $[0, 1]$ 连续, 故一致连续, 因此函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall 0 < \delta < \frac{1}{2}$, 存在 $x_1 = \frac{1}{\delta^2} > 1, x_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta^2} > 1$, 即使 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有:

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1}) > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{n}{\delta^2} > n > \varepsilon \quad (22)$$

故函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续. \square

注: 问题 (2) 当然也可取 $x_m = m + \frac{1}{m}, y_m = m$, 即使 $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m - y_m) = 0$, 但 $|x_m^n - y_m^n| > \frac{1}{m} \cdot mn > \varepsilon$.

定义 3: Lipschitz 连续

对于定义在区间 I 上的实值函数 $f(x)$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in I, \exists L > 0$ 使得:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| \quad (23)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 连续.

题目 11. 证明 Lipschitz 连续的函数一致连续.

证明. Lipschitz 连续比一致连续条件要强, 我们只需书写 Lipschitz 连续的定义, 并限制 $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 那么有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \quad (24)$$

得证. \square

0.1.5 压缩映射定理

定理 7: 压缩映射 1

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $a \in \mathbf{R}, r \in (0, 1)$, 若从某项开始, 有:

$$|a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a| \quad (25)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且以 a 为极限.

证明. 假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始, 有 $|a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a|$, 那么:

$$0 \leq |a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a| \leq r^2|a_{n-2} - a| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_N - a| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (26)$$

得证. □

定理 8: 压缩映射 2

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $r \in (0, 1)$, 若从某项开始, 有:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \quad (27)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先, 类似地假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始, 有 $|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$, 那么 $\forall n > N, p \in \mathbf{N}^+$, 我们有:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_{N+1} - a_N| \quad (28)$$

以及三角不等式, 得到:

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \quad (29)$$

$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \quad (30)$$

$$\leq (r^{n-N+p+1} + r^{n-N+p} + \cdots + r^{n-N}) |a_{N+1} - a_N| \quad (31)$$

$$= \frac{r^{n-N}(1 - r^{p+2})}{1 - r} |a_{N+1} - a_N| \quad (32)$$

$$< \frac{r^{n-N}}{1 - r} |a_{N+1} - a_N| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (33)$$

得证. □

定理 9: 压缩映射 3

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $y = f(x)$ 为定义在区间 I 的可微函数, $x_n \in I$ 且 $x_{n+1} = f(x_n)$. 若存在 $r \in (0, 1)$, 使得:

$$|f'(x)| \leq r < 1, \quad (x \in I) \quad (34)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且以 $f(x) = x$ (其所有的解称之为**不动点**) 的某个解为极限.

证明. 显然 $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq r|x_n - x_{n-1}|$. 然后使用压缩映射 1 定理即得 $\{x_n\}$ 极限存在.

另外, 对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时取极限, 得 $f(x) = x$, 得证. □

注: 当压缩常数 $r = 1$ 时, 上面三个定理一般都不成立, 一个易见的例子是, 取 $f(x) = x, x_n = n$.

题目 12. 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $|f'(x)| < 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 \in [a, b]$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 且不依赖于 x_1 .

[分析]: 我们发现此时压缩常数为 1, 无法使用压缩映射了. 而且 $|f'(x)|$ 不一定有连续性, 所以不一定有最大值, 因此我们需要想办法找到一个连续的函数 $H(x)$, 使得 $\max_{x \in [a, b]} |H(x)| < 1$ 恒成立.

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$, 则 $\exists x_0 \in [a, b]$, s.t. $f(x_0) = x_0$. 下面我们证明 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限. 取

$$|H(x)| = \begin{cases} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\xi)| < 1, & x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ |f'(x_0)|, & x = x_0 \end{cases} \quad (35)$$

易知 $|H(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $|H(x)| < 1$, 那么取 $r = \max_{x \in [a, b]} |H(x)| < 1$, 因此:

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leq r|x_n - x_0| \quad (36)$$

注意上述不等式是使用 $|H(x)|$ 的性质推出的, 而不是 Lagrange 中值定理. □

题目 13. 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, 且满足 $L = 1$ 的 Lipschitz 连续, 若:

$$x_1 \in [a, b], \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)] \quad (37)$$

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

证明. 首先, 我们有 $a \leq x_n \leq b$, 以及:

$$x - y \leq f(x) - f(y) \leq y - x, \quad y \geq x \quad (38)$$

令 $g(x) = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$, 对 $\forall y \geq x$, 有:

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x - [f(x) - f(y)]}{2} \geq 0 \quad (39)$$

故 $g(x)$ 单调递增. 由 $x_{n+1} = g(x_n)$, 不妨设 $x_2 \geq x_1$, 则 $x_3 = g(x_2) \geq g(x_1) = x_2$, 一直递推下去可知 $x_{n+1} \geq x_n$; 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = g(x_2) \leq g(x_1) = x_2$, 一直递推下去可知 $x_{n+1} \leq x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 单调有界必收敛. □

0.1.6 杂题

题目 14. 求解下列问题:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n}, k \in \mathbf{R}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n}, \alpha \in \mathbf{R}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

(4) $a_1 = \beta > 0, a_{n+1} = \sqrt{\beta + a_n}$, 判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是否存在, 并给出理由和极限值 (如极限存在).

解: (1) $k \leq 0$ 易证, 当 $k > 0$ 时,

法一: 事实上, 由泰勒展开, 取 $m = [k] + 2$ 易得 $e^n > \frac{n^m}{m!}$, 那么:

$$0 < \frac{n^k}{e^n} \leq \frac{m!}{n^{m-k}} < \frac{M}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (40)$$

法二: 我们还能使用洛必达法则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n/k}} \right)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{n/k}} \right)^k = 0 \quad (41)$$

综上, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n} = 0$.

(2) 由 $n\alpha - 1 \leq [n\alpha] \leq n\alpha$, 可知:

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{[n\alpha]}{n} \leq \alpha \quad (42)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$.

(3) 使用 Stolz 定理即可.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (43)$$

(4) 取 $a = \frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2} > 1$, 且满足 $a^2 = a + \beta$, 则:

$$|a_{n+1} - a| = \left| \sqrt{\beta + a_n} - a \right| = \left| \sqrt{\beta + a_n} - \sqrt{a + \beta} \right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{\beta + a_n} + \sqrt{a + \beta}} \quad (44)$$

记 $C = \sqrt{\beta + a_n} + \sqrt{a + \beta}$, 则 $C > \sqrt{a + \beta} > \sqrt{1 + \beta} > 1$, 故 $|a_{n+1} - a| < \frac{1}{C}|a_n - a|$.

由压缩映射原理, 知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

0.1.7 压缩映射-进阶

推论 1: 二阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果满足

$$|a_n - a| \leq p|a_{n-1} - a| + q|a_{n-2} - a| \quad (45)$$

其中 $p, q > 0 \wedge p + q < 1$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 假设

$$|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \leq k(|a_{n-1} - a| + \lambda|a_{n-2} - a|) \quad (46)$$

得到方程组:

$$\begin{cases} k\lambda = q \\ k - \lambda = p \end{cases} \quad (47)$$

随便取一对解即可, 这里取 $k = \frac{\sqrt{p^2+4q+p}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{p^2+4q-p}}{2}$.

于是如此迭代, 便得到:

$$|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \leq k(|a_{n-1} - a| + \lambda|a_{n-2} - a|) \quad (48)$$

$$\leq k^2(|a_{n-2} - a| + \lambda|a_{n-3} - a|) \quad (49)$$

$$\leq \cdots \quad (50)$$

$$\leq k^{n-1}(|a_1 - a| + \lambda|a_0 - a|) \quad (51)$$

下面我们证明 $k < 1$, 也即

$$\frac{\sqrt{p^2+4q+p}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{p^2+4q} < 2-p \Leftrightarrow p^2+4q < 4-4p+p^2 \Leftrightarrow p+q < 1 \quad (52)$$

设于是令 $n \rightarrow \infty$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a|) = 0 \quad (53)$$

由于

$$0 \leq |a_n - a| \leq |a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \quad (54)$$

$$0 \leq |a_{n-1} - a| \leq \frac{1}{\lambda}|a_n - a| + |a_{n-1} - a| \quad (55)$$

因此我们可以知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.

从上述推导过程中可以看到, 其实也可以允许 p, q 小于 0 的, 但是要增加条件. 即一方面求根公式时, 根式下方的东西要大于等于 0, 即 $p^2 + 4q \geq 0$, 另一方面 $p < 2$, 且 $q \neq 0$. \square

推论 2: 高阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果从某项开始, 满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a| \quad (56)$$

其中 $\sum_{i=1}^m p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

使用连续函数的介值性解特征方程即可.

证明详见: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/1961736760292796066>.

题目 15. 设 $x_0 \in (1, \frac{3}{2}), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$, 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1 < x_n \leq 4$ 假设 $\{x_n\}$ 极限存在为 $x \geq 1$, 则 $x = \sqrt{x} + \frac{x}{2}$, $x = 0$ (舍去) 或 $x = 4$.

由于:

$$|x_{n+1} - x| = \left| \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} - \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right| \leq |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (57)$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (58)$$

$$< \frac{1}{3}|x_n - x| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (59)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 2$.

0.1.8 关于不动点的再讨论

对于压缩映射-3 中定义的 $x_{n+1} = f(x_n)$. 如果我们能够得到 $f(x)$ 的单调性, 那么我们能否得到数列 $\{x_n\}$ 的单调性呢? 答案是肯定的! 下面我们具体分析一下:

如果 $f'(x) \geq 0$, 即 $f(x)$ 单调递增, 那么假设 $x_2 \geq x_1$, 则有 $x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2$, 以此类推, 可得到 $x_{n+1} \geq x_n$; 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = f(x_2) \leq f(x_1) = x_2$, 以此类推, 可得到 $x_{n+1} \leq x_n$. 即如果已经知道 $f(x)$ 单调递增, 那么数列 $\{x_n\}$ 的单调性之与前两项 x_1 和 x_2 的大小有关了.

如果 $f'(x) \leq 0$, 即 $f(x)$ 单调递减, 那么假设 $x_2 \geq x_1$, 则有 $x_3 = f(x_2) \leq f(x_1) = x_2$, $x_4 = f(x_3) \geq f(x_2) = x_3$, 以此类推, 可知 $x_{2n} \geq x_{2n-1}$, $x_{2n+1} \leq x_{2n}$. 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2$, $x_4 = f(x_3) \leq f(x_2) = x_3$ 以此类推, 可知 $x_{2n} \leq x_{2n-1}$, $x_{2n+1} \geq x_{2n}$.

更进一步, 如果我们知道了 x_1 和 x_3 之间的大小关系, 假设 $x_1 \leq x_3$, 那么 $x_4 = f(x_3) \leq f(x_1) = x_2$, $x_5 = f(x_4) \geq f(x_2) = x_3$, 不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递减, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递增. 若 $x_1 \geq x_3$, 那么 $x_4 = f(x_3) \geq f(x_1) = x_2$, $x_5 = f(x_4) \leq f(x_2) = x_3$, 不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递减.

事实上, 由于 $f(x)$ 单调递减, 那么 $F(x) = f(f(x))$ 单调递增, 那么 $F(x_n) = f(f(x_n)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$, 使用刚才的结论可知数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的单调性和 x_1 与 x_3 的大小有关.

因此我们有以下推论:

推论 3

设 a 为 f 的不动点, f 在 $x = a$ 点连续, 在 $U(a, r)$ 中严格单调递增, 且在 $(a-r, a)$ 上有 $f(x) > x$, 在 $(a, a+r)$ 上有 $f(x) < x$, 证明: 若 $a_{n+1} = f(a_n)$, 且 $a_1 \in U^o(a, r)$, 则 $\{a_n\}$ 严格单调, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 首先, $x = a$ 为 f 在 $U(a, r)$ 上的唯一不动点, 设 $a_1 \in (a-r, a)$, 则 $a_2 = f(a_1) < f(a) = a$, 故 $a_1, a_2 \in (a-r, a)$, 则 $a_2 = f(a_1) > a_1$, 即 $a_1 < a_2 < a$. 以此类推可知 $a_n < a$, 且 $\{a_n\}$ 单调递增并有上界, 且极限为 a (因为唯一不动点).

同理, 设 $a_1 \in (a, a+r)$, 则 $a_2 = f(a_1) > f(a) = a$, 故 $a_1, a_2 \in (a, a+r)$, 则 $a_2 = f(a_1) < a_1$, 即 $a < a_2 < a_1$. 以此类推可知 $a_n > a$, 且 $\{a_n\}$ 单调递减并有下界, 且极限为 a . \square

题目 16. 设 $x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. 问: b 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛? 并求极限值.

解: 首先解 $x = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, 得 $x = 1$, 因此数列 $\{x_n\}$ 如果收敛, 只能以 1 为极限. 令 $f = \frac{1}{2}(x^2 + 1), f'(x) = x$, 故 f 在 $x < 0$ 单调递减, 在 $x \geq 0$ 单调递增. 在 $(0, 1)$, 有 $f(x) < 1$, 在 $(1, +\infty)$, 有 $f(x) > 1$.

又由于 $x_1 = b$ 和 $x_1 = -b$ 对极限没有影响, 因此可以假定 $b \geq 0$, 最后再对称区间即可, 那么 $x_n \geq 0$.

当 $0 \leq b \leq 1$ 时, $1 \geq qx_2 = \frac{b^2+1}{2} \geq qb = x_1$, $1 \geq qx_3 = f(x_2) \geq qf(x_1) = x_2$, 归纳可知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 故收敛, 且以 1 为极限.

当 $b > 1$ 时, $x_n > 1$, 但 $x_2 = \frac{b^2+1}{2} > b = x_1$, 以此递推, 仍能得到 $\{x_n\}$ 单调递增, 但 $x_n > 1$, 故 $\{x_n\}$ 不会以 1 为极限, 那么 $\{x_n\}$ 发散.

因此 $-1 \leq b \leq 1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限值为 1, 其余情况发散.

0.1.9 函数形式的 Stolz 定理

除了数列, 其实函数也有 Stolz 定理, 不过不经常使用. 因此放到最后供查阅和有能力的同学学习.

定理 10: Stolz 定理的函数形式

- $(\frac{*}{\infty})$ 若 $T > 0$ 为常数, 且满足:
 1. $g(x+T) > g(x)$, $\forall x \geq a$;
 2. $g(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$, 且 f, g 在 $[a, +\infty)$ 内闭有界;
 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
- $(\frac{0}{0})$ 若 $T > 0$ 为常数, 且满足:
 1. $0 < g(x+T) < g(x)$, $\forall x \geq a$;
 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;
 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

由上述定理, 我们可以推出 Cauchy 定理:

定理 11: Cauchy 定理

若 f 在 $(a, +\infty)$ 内有定义, 且内闭有界, 则

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ ($f(x) \geq c > 0$), 当右边极限存在时成立.

证明. 1. 取 $g(x) = x$, $T = 1$, 则满足:

- $g(x+1) > g(x)$, $\forall x \geq a$;
- $g(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$, 且 f, g 在 $[a, +\infty)$ 内闭有界;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.

因此我们有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.

2. 首先, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}}$. 又由于 $f(x) > 0$, 且满足函数的 Stolz 定理, 可得:

$$e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x+1)) - \ln(f(x))}{x+1-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (60)$$

□

0.2 实数的完备性

直观上，实数完备性意味着实数轴上没有“间隙”（以理查德·戴德金的说法）。这是实数区别于有理数的特点，有理数在数轴上是有间隙的，即无理数。在十进制计数法下，实数的完备性等价于：实数与一个十进制小数表示一一对应。一般情况下我们认为实数的完备性主要有 8 个定理（当然也有人说 10 个，参见<https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870>），其中 6 个最为重要（和书上一致），下面我将叙述 8 个定理的版本，并将所有定理一一罗列出来：

0.2.1 实数完备性定理

定义 4: Dedekind 分割

将实数集 \mathbf{R} 分为两个子集 S 和 T ，且满足：

- (1) $S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$;
- (2) $\mathbf{R} = S \cup T$;
- (3) $\forall x \in S, \forall y \in T$ ，总有 $x < y$ ，其中 S 称为左集， T 称为右集。

由上述定义得到的对实数集 \mathbf{R} 的一个分割称为 **Dedekind 分割**，记作 (S, T) 。

定理 12: Dedekind 定理

实数集 \mathbf{R} 的任一 Dedekind 分割 (S, T) ，都唯一地确定一个实数（称为中介数或中介点），它或者是 S 的最大数（此时 T 中无最小数），或者是 T 的最小数（此时 S 中无最大数）。

定理 13: 确界原理

对于非空数集 S ，如果它有上界，则必有上确界；如果它有下界，则必有下确界。

定理 14: 致密性定理

有界数列必有收敛子列。

定理 15: 单调有界定理

单调（从某项开始单调即可）且有界（递增只需有上界；递减只需有下界）的数列必收敛。

定理 16: Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是： $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ ，对 $\forall m, n > N$ ，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 。

定理 17: 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

那么在 \mathbf{R} 中唯一地存在一点 ξ , 使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad (61)$$

定义 5: 聚点 (极限点) - 1

设 S 为数轴的点集, ξ 为某一确定的点. 如果 ξ 的任何邻域都含有 S 的无穷多个点, 则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 6: 聚点 (极限点) - 2

对于点集 S , 若点 ξ 的任何 ε 邻域都含有 S 中异于 ξ 的点, 即 $U^\circ(\xi, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, 则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 7: 聚点 (极限点) - 3

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$, 则其极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

定理 18: Weierstrass 聚点定理

\mathbf{R}^n 中任何有界无穷点集至少有一个聚点.

定义 8: 开覆盖

对于一个数集 S , 以及由一些互不相等 (可有非空交集) 的开区间 (不为无穷区间) 组成的点集

$$H = \bigcup_{k=1}^n S_k \quad (62)$$

若满足 $S \subset H$, 则称 H 为 S 的一个开覆盖. 当 n 为有限数时, 称为有限开覆盖, $n = \infty$ 时称为无限开覆盖.

定理 19: Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖.

一般情况下, 证明有限覆盖定理需要使用反证法, 而从有限覆盖定理证明其它定理则需要根据一些性质构造开覆盖. 而使用闭区间套定理证明某些性质时, 往往采用二分法分割区间.

0.2.2 例题

题目 17. 证明对任意实数 α , 均存在一个有理数列 a_n , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

证明. 取 $a_n = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$ 即可. □

题目 18. 证明有理数集 \mathbb{Q} 是不完备的.

证明. 同上题, 如果我们取 $\alpha = \pi$, 虽然 a_n 趋向于 π , 但在 \mathbb{Q} 里找不到一个数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$. □

由于实数完备性等价定理较多, 难度较大, 因此不可能把所有的用法和证明详细写出来. 下面, 我仅列举一些重要的题目, 以示实数完备性定理的应用:

题目 19. 用闭区间套定理证明零点定理.

[分析]: 零点定理, 指的是连续函数 $f(x)$ 如果在闭区间 $[a, b]$ 的端点处取值异号, 那么 f 在区间内至少含有一个零点. 因此, 我们想办法找到某一点, 使得 $f^2(\xi) \leq 0$, 那么就能得到 $f(\xi) = 0$.

证明. 设 $f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$, 那么我们取 $a_1 = a, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$, 为第一个闭区间. 取 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, 若 $f(c_1) = 0$, 则已经得证, 否则可以在 $f(a)f(c_1)$ 和 $f(c_1)f(b)$ 中找到一个小于 0 的表达式, 不妨设 $f(a)f(c_1) < 0$, 取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, I_1 = [a_2, b_2]$, 依次类推. 如果找不到一个 $f(c_i) = 0$, 那么我们可以得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$;
- (3) $f(a_n)f(b_n) < 0$.

那么由闭区间套定理知, 唯一存在一个点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

于是

$$f^2(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \tag{63}$$

□

也即 $f(\xi) = 0$.

题目 20. 用闭区间套定理证明聚点定理.

证明. 由于 S 为有界点集, 那么存在 $M > 0$, 使得 $S \subset [-M, M]$. 记 $a_1 = -M, b_1 = M$. 仿照上题取 $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个含有 S 中无穷个点, 可记为 $[a_2, b_2]$. 同理, 一直这样取下去, 我们可以得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{n-1}} = 0;$$

这是一个闭区间套, 由闭区间套定理, 知存在一点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由极限的定义, 知存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$. 由定义知 ξ 为 S 的一个聚点. \square

题目 21. 用闭区间套定理证明有限覆盖定理.

解: 反证法: 假设不能用 H 的有限项覆盖 $[a, b]$. 即 $a_1 = a, b_1 = b$, 同理取 $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个不能用 H 的有限项覆盖 $[a, b]$, 可记为 $[a_2, b_2]$. 同理, 一直这样取下去, 我们可以得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 满足:

$$(1) [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0;$$

这是一个闭区间套, 由闭区间套定理, 知存在一点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由于 H 是一个开覆盖, 那么必存在一个区间 $(\alpha, \beta) \in H$, 使得 $\xi \in (\alpha, \beta)$. 由极限的定义, 知存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$. 这与 $[a_n, b_n]$ 的选取矛盾! 故原命题成立.

题目 22. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

证明. 设 $f(x) \in C[a, b]$. 首先, 对于闭区间上的一点 $x_0 \in [a, b]$, 我们有 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_{x_0})$ 是有界的 (根据极限的定义可知), 记界为 M_{x_0} . 当 $x \in U(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]$ 时, 有 $|f(x)| \leq M_{x_0}$. 令

$$H = \{U(x_0, \delta_{x_0}) \mid |f(x)| \leq M_{x_0}, x \in U(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]\} \quad (64)$$

那么 H 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故存在一个有限子覆盖

$$H' = \{U(x_i, \delta_{x_i}) \mid U(x_i, \delta_{x_i}) \in H, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (65)$$

取 $M = \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}\}$, 则 $|f(x)| \leq M$. \square

题目 23. 用致密性定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

[分析]: 致密性定理, 指的是任何有界的数列必有收敛的子列. 如果采用正面直接证明法, 我们不知道收敛数列的极限值, 因此可能会遇到一些困难, 故我们采用反证法.

证明. 反证法. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 但对任意 $M > 0$, 存在 $\{x_n\} \in [a, b]$, 使得 $|f(x_n)| > M$.

取其收敛子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0 (k \rightarrow \infty)$, 则 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) (k \rightarrow \infty)$.²

那么由连续函数的局部有界性, 知 $f(x_{n_k})$ 有界 (否则不会收敛到 $f(x_0)$). 但这与 $|f(x_{n_k})| > M$ 矛盾! 故原命题得证. \square

²由于 f 的连续性

0.3 上下极限

上下极限的用处非常大，只要数列有界，那么就有上下极限，因此可以通过上下极限求极限。

0.3.1 定义

上下极限的定义依附于聚点的定义，因此我们先介绍一下数列的聚点的定义：

定义 9：数列的聚点

若数 a 的任一邻域含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点。

注：这里无限多项指的是数列的项，而不是数字。也就是说，如果 $x_n = 1$ ，那么 1 就是数列的聚点。

从聚点的定义可以看出，如果一个数列 $\{x_n\}$ 有极限 a ，那么该极限一定是数列 $\{x_n\}$ 的聚点。

那我们自然会问，如果数列极限不存在呢？比如非正常极限 ∞ （无界），或者是有界的数列 $(-1)^n$ 等，我们又该如何处理呢？

我们首先讨论有界的数列。依聚点的定义，我们知 $(-1)^n$ 有两个聚点 -1 和 1 ， $\sin \frac{n\pi}{4}$ 有五个聚点 $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ 。由于这些数列都是有界的，因此我们猜测有界的数列必有聚点，即使极限不存在。事实也的确如此：

定理 20：有界数列聚点存在和最值性

对于有界数列 $\{x_n\}$ 至少含有一个聚点，且存在最大聚点和最小聚点。

证明。因数列有无穷多项，因此可以使用闭区间套定理，每次二分区间，选择含有无穷多项的区间 $[a_k, b_k]$ ，可得到一个闭区间套，故可知聚点存在。

下面证明最值性，对于最大聚点，只需在选择区间时，优先选择右侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取左边的区间，由此得到的为最大聚点。若不然，还存在更大的聚点 $\xi' > \xi$ ，则取 $\delta = \frac{1}{3}(\xi' - \xi) > 0$ ，则在 $U(\xi', \delta)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项³，但 n 充分大时， $U(\xi', \delta)$ 全部落在 $[a_n, b_n]$ 右侧，这与优先选取右侧区间步骤相矛盾，故 ξ 为最大区间。

对于最小聚点也同理，优先选择左侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取右边的区间，由此得到的为最小聚点。□

对于最大聚点和最小聚点，我们分别称为上极限和下极限。

定义 10：上下极限

有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点 L 和最小聚点 l 分别称为上极限和下极限，并记作

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (66)$$

³依聚点的定义可知。

因此有界数列一定有上下极限. 下面我们介绍一下上下极限的几个重要的定理, 以便后续使用.

定理 21: 上下极限不等式

对于有界数列 $\{x_n\}$, 我们有:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (67)$$

证明. 依上下极限的选取可知该定理成立. □

定理 22: 数列收敛的充要条件

有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (68)$$

证明. (\Rightarrow) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $\{x_n\}$ 只有一个聚点 A^4 , 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(\Leftarrow) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 由上下极限的选取, 可知仅能选取一个聚点 A , 但又由聚点的定义和数列收敛的定义, 知 A 即为 $\{x_n\}$ 的极限值. □

定理 23: 上下极限的保不等式

设有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 且从某项起, 有 $a_n \leq b_n$, 则:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (69)$$

又若存在 $\alpha \leq \beta$, 且从某项起, 有 $\alpha \leq a_n \leq \beta$, 则:

$$\alpha \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \beta \quad (70)$$

注: 不要认为也满足 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$. 我们可以构造一个反例, 令

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} 2, & n \text{ 为奇数} \\ 0.5, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (71)$$

虽然 $a_n \leq b_n$, 但 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

⁴数列收敛的等价定义

推论 4

对于有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 我们有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (72)$$

现在我们处理无界数列的情况. 我们发现, 如果将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点, 那么它也满足聚点的定义. 即 $+\infty, -\infty$ 可能是无界数列的聚点. 对于这样形成的上下极限, 我们称之为非正常上下极限, 记法和一般的上下极限类似.

定义 11: 非正常上下极限

假设 $+\infty$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限, $-\infty$ 为数列 b_n 的下极限, 那么:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty \quad (73)$$

在一般的讨论中, 我们一般只讨论正常的上下极限, 如非特别说明, 下面考虑的上下极限均为有界数列的 (正常) 上下极限.

除此之外, 上下极限还有另外一种定义:

定义 12: 上下极限确界定义

设 $\{x_n\}$ 为有界实数列, 则有:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k\} = \inf_{n} \sup_{k \geq n} \{x_k\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_k\} = \sup_n \inf_{k \geq n} \{x_k\} \quad (74)$$

注: 使用上确界数列不减 (递减), 下确界不减 (递增) 的性质可证上述等式成立.

注: 由上式可以看出, 数列 $\{x_n\}$ 的上极限, 就是 $\{x_k\}, k \geq n$ 的上确界的极限 (上确界的下确界); 数列 $\{x_n\}$ 的下极限, 就是 $\{x_k\}, k \geq n$ 的下确界的极限 (下确界的上确界).

0.3.2 Stolz 定理下极限形式

除了极限形式的 Stolz 定理, 也存在上下极限形式的 Stolz 定理.

定理 24: 上下极限形式的 Stolz 定理

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$. 若 $\{y_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$, 则有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (75)$$

证明. 只需证明第一个不等式和第三个不等式即可. 下面仅证第三个不等式:

设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = M$, 则存在 $N, \varepsilon = \varepsilon(n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq M + \varepsilon \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \leq (y_{n+1} - y_n)(M + \varepsilon) \quad (\text{注意 } y_n \text{ 严格单调}) \quad (76)$$

那么

$$\sum_{k=N}^n (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=N}^n (y_{k+1} - y_k)(M + \varepsilon) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_N \leq (y_{n+1} - y_N)(M + \varepsilon) \quad (77)$$

因此

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \left(1 - \frac{y_N}{y_{n+1}}\right)(M + \varepsilon) + \frac{y_N}{y_{n+1}} \leq M + k\varepsilon \quad (78)$$

两边同时取上极限, 且由 ε 的任意性, 得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. □

注: 也可以这样理解, 如取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(M + \frac{k}{n}\right) = M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (79)$$

0.3.3 上下极限的一些例题

上下极限虽然方便和实用, 但是很容易出错, 首先由前面几个定理和推论可以看出, 整体的上(下)极限, 并不等于分开的式子取上(下)极限之后再求和. 另外, 我们再给出几个等式, 并在下面给出一些上下极限的例题.

推论 5: 上下极限等式

设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 则

- 加负号反转上下极限

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) \quad , \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) \quad (80)$$

- 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (81)$$

- 当 $x_n \geq 0$ 时, 有

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n^2 \quad (82)$$

推论 6: 上下极限等式 (续)

设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 则

- 若 $f(x)$ 单调递增且 $f(x_n) > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) > 0$ 恒成立, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n)} \quad (83)$$

一个特殊的例子就是取 $f(x) = x, x_n > 0, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, 我们得到:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n} \quad (84)$$

- 若 $f(x)$ 单调递增且连续, 又满足 $x_n > 0$ 恒成立, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (85)$$

注: 设 $\{x_n\}$ 为区间 I 上的有界数列, 函数 f 在 I 上连续. 对于一般的极限, 只要函数连续, 即可和极限交换顺序. 但对于上下极限, 即使函数连续, 上下极限也不能随便和函数交换顺序, 即

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (86)$$

当函数单调有界时可以交换顺序. 单调递增符号不变, 单调递减上下极限符号反转.

题目 24. $x_n > 0, y_n > 0$ 且均有上界, 试证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (87)$$

当 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 的极限存在时取等.

证明. 1° 当某个数列上极限为 0 时, 不妨设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 由于 $0 \leq l_x \leq L_x = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 又 $0 < x_n y_n < M \cdot x_n (M > 0)$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (88)$$

2° 当两个数列上极限均不为 0 时, 那么我们有:

$$\ln\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)\right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\ln x_n + \ln y_n) \quad (89)$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \ln \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \ln \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (90)$$

$$= \ln\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n\right) \quad (91)$$

这说明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (92)$$

当且仅当 $\ln x_n$ 或 $\ln y_n$ 极限存在时取等, 也即 x_n 或 y_n 极限存在且大于 0.

证毕. □

题目 25. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 首先, 易见 $1 \leq x_n \leq 2$ ($n \geq 3$). 设 L, l 分别为 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限, 则

$$L = 1 + \frac{1}{l}, \quad l = 1 + \frac{1}{L} \quad (93)$$

可知 $L = l$, 则 $\{x_n\}$ 收敛, 设收敛到 x , 则 $x = 1 + \frac{1}{x}$, 得 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

题目 26. 有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} + 2a_n) = 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 首先 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

设 $|a_n|$ 的上下极限分别为 L, l , 那么:

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2a_n + a_{2n}| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|2a_n| - |a_{2n}|) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2a_n| + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-|a_{2n}|) \quad (94)$$

$$= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2a_n| - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_{2n}|) \quad (95)$$

$$= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| + \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_{2n}|) \right) \quad (96)$$

$$\geq L \quad (97)$$

但 $L \geq 0$, 因此只能 $L = l = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

题目 27. 设 $x_0 \in (1, \frac{3}{2}), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_n - 1}{2}$, 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1 < x_n \leq 4$. 那么:

$$L \leq \sqrt{L} + \frac{L}{2}, \quad l \geq \sqrt{l} + \frac{l}{2} \quad (98)$$

则 $L = l = 4$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

我们之前提到过:

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果从某项开始, 满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a| \quad (99)$$

其中 $\sum_{i=1}^m p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

我们现在使用上下极限证明一下:

证明. 首先, 我们假设从 $n > N$ 开始, 满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a|$$

取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \dots, |a_N - a|\}$, 那么 $|a_i - a| \leq M (i = 1, 2, \dots, N)$.

使用第二数学归纳法, 假设 $|a_k - a| \leq M$, 那么

$$|a_{k+1} - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{k-i} - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i M < M \quad (100)$$

故有 $|a_n - a|$ 有界. 设其上下极限分别为 L, l , 则:

$$L \leq \sum_{i=1}^m p_i L \Leftrightarrow \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i\right) L \leq 0 \quad (101)$$

因此 $L = 0, 0 \leq l \leq L = 0$, 故 $L = l = 0$, 因此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square

题目 28. 设 $a_1 = a > 0, a_2 = b > 0, a_{n+2} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 易证 $2 \leq a_n \leq \frac{5}{2} (n \geq 3)$. 设 $x = 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$, 即 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 = 0$, 限制 $x \in [2, \frac{5}{2}]$.

又 $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) > 0$, 故单调, 且 $f(2)f(\frac{5}{2}) < 0$, 即存在唯一 $x_0 \in (2, \frac{5}{2})$, s.t. $f(x_0) = 0$, 即 $x_0 = 2 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}$.

那么

$$|a_{n+2} - x_0| = \left| 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} - 2 - \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| = \left| \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| \quad (102)$$

$$\leq \left| \frac{(a_{n+1} - x_0)(a_{n+1} + x_0)}{x_0^2 a_{n+1}^2} \right| + \left| \frac{(a_n - x_0)(a_n + x_0)}{x_0^2 a_n^2} \right| \quad (103)$$

$$\leq \frac{5}{16} |a_{n+1} - x_0| + \frac{5}{16} |a_n - x_0| \quad (104)$$

设 L, l 分别为 $b_n = |a_n - x_0|$ 的上下极限, 则

$$0 \leq l \leq L \leq \frac{5}{16} L + \frac{5}{16} L = \frac{5}{8} L \quad (105)$$

故 $L = l = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. □

题目 29. 设 $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$, 对于 $n \geq 0$, 定义:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \end{cases}$$

证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. (1)

首先, $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$. 那么 $x_n, y_n \in [0, 1]$ ($\forall n \geq 1$). 当 $n \geq 1$ 时, 有:

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \left| \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} - \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \right| \quad (106)$$

$$= \left| \frac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \right| \quad (107)$$

$$\leq \frac{x_n + y_n}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} |x_n - y_n| \quad (108)$$

$$\leq \frac{x_n + y_n}{1 + 3x_n^2 + 2x_n y_n + 3y_n^2} |x_n - y_n| \quad (109)$$

$$\leq \frac{x_n + y_n}{1 + 2x_n^2 + 4x_n y_n + 2y_n^2} |x_n - y_n| \quad (110)$$

$$\leq \frac{1}{2} |x_n - y_n| \quad (111)$$

$$(112)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$.

(2) 设 L, l 分别为数列 $\{x_n\}$ 的上下极限, 那么 $0 \leq l \leq L \leq 1$. 由于 $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, 故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + L = L, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + l = l \quad (113)$$

下面给出两种方法证明 $\{x_n\}$ 极限存在.

法一 (原创): 我们直接对第一个递推关系式取上下极限, 会得到如下结果:

$$L = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} \leq \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n + 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n^2 + 1} \quad (114)$$

$$\leq \frac{1}{l^2 + l \cdot l + 2l^2 + 1} = \frac{1}{4l^2 + 1} \quad (115)$$

以及

$$l = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} \geq \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n + 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n^2 + 1} \quad (116)$$

$$\geq \frac{1}{L^2 + L \cdot L + 2L^2 + 1} = \frac{1}{4L^2 + 1} \quad (117)$$

那么有:

$$L \leq \frac{1}{4L^2 + 1} \leq \frac{1}{4 \left(\frac{1}{4L^2 + 1} \right)^2 + 1} \Leftrightarrow (4L^2 + 1)^2(L - 1) + 4L \leq 0 \quad (118)$$

$$l \geq \frac{1}{4L^2 + 1} \geq \frac{1}{4 \left(\frac{1}{4l^2 + 1} \right)^2 + 1} \Leftrightarrow (4l^2 + 1)^2(l - 1) + 4l \geq 0 \quad (119)$$

令 $f(x) = (4x^2 + 1)^2(x - 1) + 4x$. 下面通过三个分支继续求解:

分支一: 注意到

$$\begin{aligned} (4L^2 + 1)^2(L - 1) + 4L &= (4L^2 - 1 + 2)^2(L - 1) + 4L \\ &= (4L^2 - 1)^2(L - 1) + 4(4L^2 - 1)(L - 1) + 4(2L - 1) \\ &= (2L - 1) [(2L - 1)(2L + 1)^2(L - 1) + 4(2L + 1)(L - 1) + 4] \\ &= (2L - 1) [(2L - 1)(2L + 1)^2(L - 1) + 4L(2L - 1)] \\ &= (2L - 1)^2 [(2L + 1)^2(L - 1) + 4L] \\ &= (2L - 1)^2 [(2L - 1 + 2)^2(L - 1) + 4L] \\ &= (2L - 1)^2 [(2L - 1)^2(L - 1) + 4(2L - 1)(L - 1) + 4(2L - 1)] \\ &= (2L - 1)^3 [(2L - 1)(L - 1) + 4(L - 1) + 4] \\ &= (2L - 1)^3(2L^2 + L + 1) \end{aligned} \quad (120)$$

可知 $x = \frac{1}{2}$ 为 $g(x) = 0$ 的唯一实根 (三重根), 且可看出, $f(x)$ 单调递增, 故可得 $L \leq \frac{1}{2}$. 同理 $l \geq \frac{1}{2}$, 那么只能 $L = l = \frac{1}{2}$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

分支二: 首先, 注意到 $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根, 且

$$f'(x) = 16x(x - 1)(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)^2 + 4 \quad (121)$$

$$f''(x) = 16(3x - 1)(4x^2 + 1) + 128x^2(x - 1) \quad (122)$$

$$f'''(x) = 960x^2 - 384x + 48 \quad (123)$$

注意到 $f'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 0, f'''(\frac{1}{2}) \neq 0$.

故 $f(x) = (x - 1)^3 g(x)$, $g(x)$ 为二次多项式, 且 $g(\frac{1}{2}) \neq 0$. 通过待定系数法或多项式除法, 可得 $g(x) = 2x^2 + x + 1$. 剩余步骤和分支一一致.

分支三: 首先, 注意到 $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根, 且

$$f'(x) = 16x(x - 1)(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)^2 + 4 \quad (124)$$

$$f''(x) = 16(3x - 1)(4x^2 + 1) + 128x^2(x - 1) \quad (125)$$

$$f'''(x) = 960x^2 - 384x + 48 \quad (126)$$

注意到 $f'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 0$. $\Delta = 384^2 - 4 \cdot 960 \cdot 48 = -36864 < 0$, 因此 $f'''(x) > 0$ 恒成立, 也即 $f''(x)$ 单调递增. 由于 $f''(\frac{1}{2}) = 0$, 因此在 $(-\infty, \frac{1}{2})$, $f''(x) < 0$, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, $f''(x) > 0$, 故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增, 又由于 $f'(\frac{1}{2}) = 0$, 故 $f'(x) \geq 0$ 恒成立. 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 那么

$$f(L) \leq 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow L \leq \frac{1}{2} \quad (127)$$

$$f(l) \geq 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow l \geq \frac{1}{2} \quad (128)$$

因此 $L = l = \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

分支四: 已知等价:

$$L(4L^2 + 1) \leq 1, \quad l(4l^2 + 1) \geq 1 \quad (129)$$

故

$$L(4l^2 + 1) \leq l(4L^2 + 1) \Leftrightarrow (4Ll - 1)(L - l) \geq 0 \quad (130)$$

若 $L \neq l$, 则 $4Ll \geq 1$, 以及 $1 \geq L(4l^2 + 1) = 4Ll \cdot l + L \geq L + l$.

因此

$$(L + l)^2 = L^2 + 2Ll + l^2 \leq 1 \leq 4Ll \Rightarrow (L - l)^2 \leq 0 \quad (131)$$

只能 $L = l$. 最后再考虑 $g(x) = 4x^3 + x - 1, g(l) = g(L) = 0^5$, 易知其单调递增, 且 $g(\frac{1}{2}) = 0$, 则 $L = l = \frac{1}{2}$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

法二 (官方答案): 首先, 我们有:

$$(x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 3x_n^2 - x_n y_n - 2y_n^2 = 4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) \quad (132)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 0 \quad (133)$$

又由于

$$2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1 = (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) - (y_n^2 - x_n^2) \quad (134)$$

⁵把 $L = l$ 代入上述 (129) 可得.

故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4l^2 \quad (135)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4l^2 \quad (136)$$

那么

$$L = \frac{1}{4l^2 + 1}, \quad l = \frac{1}{4L^2 + 1} \quad (137)$$

也即 $4L^2 + 1 = \frac{1}{l}$, $4l^2 + 1 = \frac{1}{L}$, 故

$$l(4L^2 + 1) = L(4l^2 + 1) = 1 \quad (138)$$

若 $L \neq l$, 则 $4Ll = 1, L + l = 1$, 解得 $L = l = \frac{1}{2}$ 矛盾, 因此 $L = l = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$. \square

注: 方法一不能取等, 是因为没有证明

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) &= 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4l^2 \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) &= 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4l^2 \end{aligned}$$

因此只能得到关于上下极限的不等式.

另外, 上下极限也有一些无法做的题目, 比如定义的数列形如 $x_{n+1} = x_n + o(1)$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} o(1) = 0$, 对其取上下极限只能得到恒等式, 对做题没帮助.

题目 30. 定义 $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n^2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 事实上, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (139)$$

有时候, 虽然上下极限不能直接证明结论得到结果, 但却能在中间起辅助作用.

题目 31. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 \leq x_{n+2} \leq \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

解: 易得

$$y_{n+1} = 2x_{n+2} + x_{n+1} \leq 2x_{n+1} + x_n = y_n \quad (140)$$

由数学归纳法, 知 $0 \leq x_n \leq M$ (M 为一固定的常数). 故 $\{y_n\}$ 单调递减且有界, 则收敛, 设极限值为

y_0 . 设 $\{a_n\}$ 的上、下极限分别为 L, l , 又由于 $x_n = y_n - 2x_{n+1}$, 则:

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n - 2x_{n+1}) = y_0 - 2l, \quad l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n - 2x_{n+1}) = y_0 - 2L \quad (141)$$

解得 $L = l = \frac{y_0}{3}$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

注: 如果我们直接对 y_n 取上、下极限, 则只能得到 $y_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_{n+2} + x_{n+1}) \leq 2L + L = 3L$, $y_0 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_{n+2} + x_{n+1}) \geq 2l + l = 3l$.

从表面看起来, 上下极限比极限要求更弱, 因此能通过普通极限去做的题目, 一定能使用上下极限做. 反之, 由于收敛的充要条件 (上下极限相等), 虽然能做出来, 但可能会比较困难. 上下极限和普通的极限有很大区别, 因此有时候的结论可能并不显然, 甚至是错误的, 因此读者需要严格遵守定理、推论中的公式进行计算, 而不是通过自己“臆想”公式去计算.

当然, 我们鼓励读者对定理、推论等进行推广证明, 尝试发现新的公式.

0.4 级数