

目录

| | | |
|----------|-----------------|-----------|
| 1 | 极限与连续 | 1 |
| 1.1 | 单调有界定理 | 1 |
| 1.2 | Stolz 定理 | 2 |
| 1.3 | Cauchy 收敛准则 | 4 |
| 1.4 | 一致连续 | 5 |
| 1.5 | 压缩映射定理 | 7 |
| 1.6 | 杂题 | 9 |
| 1.7 | 压缩映射-进阶 | 10 |
| 1.8 | 关于不动点的再讨论 | 11 |
| 1.9 | 函数形式的 Stolz 定理 | 12 |
| 2 | 实数的完备性 | 14 |
| 2.1 | 实数完备性定理 | 14 |
| 2.2 | 例题 | 16 |
| 3 | 上下极限 | 18 |
| 3.1 | 定义 | 18 |
| 3.2 | Stolz 定理下极限形式 | 20 |
| 3.3 | 上下极限的一些例题 | 21 |
| 4 | 数项级数 | 30 |
| 4.1 | 级数的定义 | 30 |
| 4.2 | 正项级数敛散性判别法 | 31 |
| 4.3 | 正项级数敛散性判别法 (拓展) | 31 |
| 4.4 | 一般项级数敛散性判别法 | 31 |

第 1 章 极限与连续

1.1 单调有界定理

题目 1.1.1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

解:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \overbrace{1 \cdots 1}^{n-2 \text{个} 1}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

定理 1.1.1: 单调有界定理

有界的单调数列必收敛.

题目 1.1.2. 证明单调有界定理.

证明. 不妨设 a_n 单调递增, $a = \sup a_n$. 则由上确界的定义立知 $a_n \leq a$, 且 $\forall \varepsilon > 0, a - \varepsilon < a$, 故存在 $N > 0$, 使得 $a_N > a - \varepsilon$.

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall n > N$, 有:

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \quad (1.1.1)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

题目 1.1.3. 若单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.(注意与单调有界定理相比较)

证明. 法一: 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增, 只需证明 $\{a_n\}$ 有上界即可. 设子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛, 则 $\exists M > 0, s.t. a_{n_k} < M$. 但对任意的 k , 由于 $k \leq n_k$, 故 $a_k \leq a_{n_k} < M$.

因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

法二: 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0$, 当 $k > K$ 时, 有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

当 $n > n_{K+1}$ 时, 存在 $m > n > K + 1$, 使得 $n < m \leq n_m$. 故 $a_{n_{K+1}} < a_n \leq a_{n_m}$, 也即:

$$-\varepsilon < a_{n_{K+1}} - a < a_n - a \leq a_{n_m} - a < \varepsilon$$

也即 $\{a_n\}$ 收敛. □

1.2 Stolz 定理

定理 1.2.1: Stolz 定理

1. $(\frac{*}{\infty})$ 设 x_n (严格) 单调递增趋于无穷大, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

2. $(\frac{0}{0})$ 设 x_n (严格) 单调递减趋于 0, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

注: 极限等式成立的前提, 除了对单调性和极限有要求外, 还要求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ (*) 必须存在 (包括非正常极限). 满足题干条件外, 当 (*) 极限为 $+\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$; 当 (*) 极限为 $-\infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = -\infty$.

注: 不能认为 (*) 式极限不存在, 则左式极限一定不存在. 例如取 $y_n = (-1)^n, x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, 但 $\frac{(-1)^{n+1} - (-1)^n}{(n+1) - n} = 2 \cdot (-1)^{n+1}$ 极限不存在.

注: 在满足特定的条件下才有 Stolz 逆定理 (即使用左式极限推右式). 例如, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 和 (*) 极限均存在时, 我们可以利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ 的极限计算 (*) 的极限. 当然, Stolz 逆定理还有一些其它的版本, 但比较复杂, 目前用不到.

题目 1.2.1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})}{(n) - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (1.2.1)$$

注: 当 a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 也成立.

题目 1.2.2. 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

解: 1. 当 $a = 0$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (1.2.2)$$

2. 当 $a \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)}{n}} = e^{\ln a} = a \quad (1.2.3)$$

题目 1.2.3. 求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}}$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln \sum_{k=1}^{n+1} k^{2020} - \ln \sum_{k=1}^n k^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln \left(1 + \frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}\right)} \quad (1.2.4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^n k^{2020}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2020}} \quad (1.2.5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020} = \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021} \quad (1.2.6)$$

题目 1.2.4. 设 $x_{n+1} = \sin x_n, x_1 \in (0, \pi)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n$

解: 显然 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0, 故:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} \quad (1.2.7)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = 3 \quad (1.2.8)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$$

注: 读者可思考一下, 在进行计算时, 为什么使用 $\frac{n}{x_n^2}$, 而不是 $\frac{x_n^2}{n}$?

注: 本题还可以“加边”, 即再次使用 Stolz 定理, 可以求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt{\frac{n}{3}} x_n) = \frac{3}{10}$. 不过不要先着急求, 我们再看一个稍微“复杂”一点的题目.

题目 1.2.5. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, 求:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$$

解: 第一步, 我们首先求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$. 由于 x_n 单调递增到 ∞^1 , 因此我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} + x_n}{2x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n + \frac{1}{x_n}}{2x_n} = 1 \quad (1.2.9)$$

¹单调易见, 使用反证法可看出趋于无穷

我们得到一个很有用的结论: $x_n \sim \sqrt{2n}, n \rightarrow \infty$.

那么:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} \quad (1.2.10)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} \quad (1.2.11)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}\right) - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{4} \quad (1.2.12)$$

注: 我们观察计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ 的步骤, 发现有多处使用了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 的结果. 事实上, 这是一种做题技巧.

具体来说, 我们要使用 Stolz 定理, 尤其是递推数列算一个分式的极限的时候, 我们尽可能要消去 n (不包括数列 $\{x_n\}$ 中的 n), 换句话说, 就是统一变量. 把含有 n 的式子尽量化为 $a_n + kn$ 的形式, 且也不是分式, 这就解释了为什么刚才我们不使用 $\frac{x_n^2}{n}$ 来计算.

另外, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 也很自然了. 一方面是使用有理化, 把 $\sqrt{2n}$ 变为 $2n$ 时要用到, 另一方面把 $\frac{1}{n}$ 化为 $\frac{2}{x_n^2}$ 要用到.

把所有显含 n 的式子转化为数列后, 我们可以使用递推关系式统一变量, 比如均转化为 x_n . 这样, 再使用海涅归结原则, 我们只需求解其对应的函数极限即可.

1.3 Cauchy 收敛准则

定理 1.3.1: 数列收敛的 Cauchy 准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (1.3.1)$$

上述定理亦可等价: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $n > N$, 和一切 $p \in \mathbb{N}^+$, 均有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad (1.3.2)$$

题目 1.3.1. 若对任意的 $p \in \mathbb{N}^+$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 那么 $\{a_n\}$ 收敛吗?

解: $\{a_n\}$ 不一定收敛, 比如取 $a_n = \sqrt{n}$, 那么 $0 \leq |a_{n+p} - a_n| = |\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

注: 极限不一定存在的原因: 题目表述和 Cauchy 收敛定理并不等价, 题目是指固定一个 p 后, 我们能证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 即找到一个 $N = N(p, \varepsilon)$; 而 Cauchy 收敛准则则是固定了 $N = N(\varepsilon)$, 再选取 p , 此时 N 已经和 p 无关了, 因此 Cauchy 收敛准则的要求更高一些.

注: 将 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$ 改为 $|a_{n+p} - a_n| \Rightarrow 0$, 即对于 $n \rightarrow \infty$ 时, 关于 p 一致收敛. 则可得 $\{a_n\}$ 收敛.

定义 1.3.1: 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 有定义, 如果满足:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1.3.3)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

定理 1.3.2: 函数极限存在的柯西收敛准则

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta')$ 有定义, 我们说它在 $x = x_0$ 处收敛, 如果对于 $\varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta'$, 使得 $\forall x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (1.3.4)$$

1.4 一致连续

定义 1.4.1: 一致连续

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得任意 $x', x'' \in I$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (1.4.1)$$

注: 从直观上来看, 柯西收敛准则和一致连续的定义很相似。它们主要的区别是, 柯西收敛准则只考虑了 x_0 那一点的性质, 而一致连续则考虑了全局的性质.

定理 1.4.1

闭区间上的连续函数一致连续.

定理 1.4.2: 一致连续的可加性

设函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a, b]$ 和 $[b, c]$ ($a < b < c$) 一致连续, 则 f 在 $[a, c]$ 上一致连续. 且当 $c = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 也成立 (相应区间括号要进行修改).

题目 1.4.1. 若 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$, 证明:

(1) 函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续;

(2) 函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续.

证明. 首先, 我们有

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (1.4.2)$$

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 对任意 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_1^{\frac{n-2}{n}}x_2 + \cdots + x_2^{\frac{n-2}{n}}x_1 + x_2^{\frac{n-1}{n}}} \right| \quad (1.4.3)$$

$$\leq \frac{1}{n} |x_1 - x_2| < \varepsilon \quad (1.4.4)$$

这说明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续, 又由于 f 在 $[0, 1]$ 连续, 故一致连续, 因此函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall 0 < \delta < \frac{1}{2}$, 存在 $x_1 = \frac{1}{\delta^2} > 1, x_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta^2} > 1$, 即使 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有:

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1}) > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{n}{\delta^2} > n > \varepsilon \quad (1.4.5)$$

故函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续. □

注: 问题 (2) 当然也可取 $x_m = m + \frac{1}{m}, y_m = m$, 即使 $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m - y_m) = 0$, 但 $|x_m^n - y_m^n| > \frac{1}{m} \cdot mn > \varepsilon$.

定义 1.4.2: Lipschitz 连续

对于定义在区间 I 上的实值函数 $f(x)$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in I, \exists L > 0$ 使得:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| \quad (1.4.6)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 连续.

题目 1.4.2. 证明 Lipschitz 连续的函数一致连续.

证明. Lipschitz 连续比一致连续条件要强, 我们只需书写 Lipschitz 连续的定义, 并限制 $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 那么有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \quad (1.4.7)$$

得证. □

1.5 压缩映射定理

定理 1.5.1: 压缩映射 1

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $a \in \mathbf{R}, r \in (0, 1)$, 若从某项开始, 有:

$$|a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a| \quad (1.5.1)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且以 a 为极限.

证明. 假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始, 有 $|a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a|$, 那么:

$$0 \leq |a_n - a| \leq r|a_{n-1} - a| \leq r^2|a_{n-2} - a| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_N - a| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (1.5.2)$$

得证. □

定理 1.5.2: 压缩映射 2

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $r \in (0, 1)$, 若从某项开始, 有:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \quad (1.5.3)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先, 类似地假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始, 有 $|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$, 那么 $\forall n > N, p \in \mathbf{N}^+$, 我们有:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_{N+1} - a_N| \quad (1.5.4)$$

以及三角不等式, 得到:

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \quad (1.5.5)$$

$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \quad (1.5.6)$$

$$\leq (r^{n-N+p+1} + r^{n-N+p} + \cdots + r^{n-N}) |a_{N+1} - a_N| \quad (1.5.7)$$

$$= \frac{r^{n-N}(1 - r^{p+2})}{1 - r} |a_{N+1} - a_N| \quad (1.5.8)$$

$$< \frac{r^{n-N}}{1 - r} |a_{N+1} - a_N| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (1.5.9)$$

得证. □

定理 1.5.3: 压缩映射 3

设 $\{a_n\}$ 为一数列, $y = f(x)$ 为定义在区间 I 的可微函数, $x_n \in I$ 且 $x_{n+1} = f(x_n)$. 若存在 $r \in (0, 1)$, 使得:

$$|f'(x)| \leq r < 1, \quad (x \in I) \quad (1.5.10)$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且以 $f(x) = x$ (其所有的解称之为**不动点**) 的某个解为极限.

证明. 显然 $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq r|x_n - x_{n-1}|$. 然后使用压缩映射 1 定理即得 $\{x_n\}$ 极限存在.

另外, 对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时取极限, 得 $f(x) = x$, 得证. □

注: 当压缩常数 $r = 1$ 时, 上面三个定理一般都不成立, 一个易见的例子是, 取 $f(x) = x, x_n = n$.

题目 1.5.1. 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $|f'(x)| < 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 \in [a, b]$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 且不依赖于 x_1 .

[分析]: 我们发现此时压缩常数为 1, 无法使用压缩映射了. 而且 $|f'(x)|$ 不一定有连续性, 所以不一定有最大值, 因此我们需要想办法找到一个连续的函数 $H(x)$, 使得 $\max_{x \in [a, b]} |H(x)| < 1$ 恒成立.

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$, 则 $\exists x_0 \in [a, b]$, s.t. $f(x_0) = x_0$. 下面我们证明 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限. 取

$$|H(x)| = \begin{cases} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\xi)| < 1, & x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ |f'(x_0)|, & x = x_0 \end{cases} \quad (1.5.11)$$

易知 $|H(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $|H(x)| < 1$, 那么取 $r = \max_{x \in [a, b]} |H(x)| < 1$, 因此:

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leq r|x_n - x_0| \quad (1.5.12)$$

注意上述不等式是使用 $|H(x)|$ 的性质推出的, 而不是 Lagrange 中值定理. □

题目 1.5.2. 设函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$, 且满足 $L = 1$ 的 Lipschitz 连续, 若:

$$x_1 \in [a, b], \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)] \quad (1.5.13)$$

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

证明. 首先, 我们有 $a \leq x_n \leq b$, 以及:

$$x - y \leq f(x) - f(y) \leq y - x, \quad y \geq x \quad (1.5.14)$$

令 $g(x) = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$, 对 $\forall y \geq x$, 有:

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x - [f(x) - f(y)]}{2} \geq 0 \quad (1.5.15)$$

故 $g(x)$ 单调递增. 由 $x_{n+1} = g(x_n)$, 不妨设 $x_2 \geq x_1$, 则 $x_3 = g(x_2) \geq g(x_1) = x_2$, 一直递推下去可知 $x_{n+1} \geq x_n$; 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = g(x_2) \leq g(x_1) = x_2$, 一直递推下去可知 $x_{n+1} \leq x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 单调有界必收敛. □

1.6 杂题

题目 1.6.1. 求解下列问题:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n}, k \in \mathbf{R}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n}, \alpha \in \mathbf{R}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$

(4) $a_1 = \beta > 0, a_{n+1} = \sqrt{\beta + a_n}$, 判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是否存在, 并给出理由和极限值 (如极限存在).

解: (1) $k \leq 0$ 易证, 当 $k > 0$ 时,

法一: 事实上, 由泰勒展开, 取 $m = [k] + 2$ 易得 $e^n > \frac{n^m}{m!}$, 那么:

$$0 < \frac{n^k}{e^n} \leq \frac{m!}{n^{m-k}} < \frac{M}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (1.6.1)$$

法二: 我们还能使用洛必达法则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n/k}} \right)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{n/k}} \right)^k = 0 \quad (1.6.2)$$

综上, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{e^n} = 0$.

(2) 由 $n\alpha - 1 \leq [n\alpha] \leq n\alpha$, 可知:

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{[n\alpha]}{n} \leq \alpha \quad (1.6.3)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$.

(3) 使用 Stolz 定理即可.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (1.6.4)$$

(4) 取 $a = \frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2} > 1$, 且满足 $a^2 = a + \beta$, 则:

$$|a_{n+1} - a| = \left| \sqrt{\beta + a_n} - a \right| = \left| \sqrt{\beta + a_n} - \sqrt{a + \beta} \right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{\beta + a_n} + \sqrt{a + \beta}} \quad (1.6.5)$$

记 $C = \sqrt{\beta + a_n} + \sqrt{a + \beta}$, 则 $C > \sqrt{a + \beta} > \sqrt{1 + \beta} > 1$, 故 $|a_{n+1} - a| < \frac{1}{C}|a_n - a|$.

由压缩映射原理, 知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

1.7 压缩映射-进阶

推论 1.7.1: 二阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果满足

$$|a_n - a| \leq p|a_{n-1} - a| + q|a_{n-2} - a| \quad (1.7.1)$$

其中 $p, q > 0 \wedge p + q < 1$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 假设

$$|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \leq k(|a_{n-1} - a| + \lambda|a_{n-2} - a|) \quad (1.7.2)$$

得到方程组:

$$\begin{cases} k\lambda = q \\ k - \lambda = p \end{cases} \quad (1.7.3)$$

随便取一对解即可, 这里取 $k = \frac{\sqrt{p^2+4q+p}}{2}, \lambda = \frac{\sqrt{p^2+4q-p}}{2}$.

于是如此迭代, 便得到:

$$|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \leq k(|a_{n-1} - a| + \lambda|a_{n-2} - a|) \quad (1.7.4)$$

$$\leq k^2(|a_{n-2} - a| + \lambda|a_{n-3} - a|) \quad (1.7.5)$$

$$\leq \cdots \quad (1.7.6)$$

$$\leq k^{n-1}(|a_1 - a| + \lambda|a_0 - a|) \quad (1.7.7)$$

下面我们证明 $k < 1$, 也即

$$\frac{\sqrt{p^2+4q+p}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{p^2+4q} < 2-p \Leftrightarrow p^2+4q < 4-4p+p^2 \Leftrightarrow p+q < 1 \quad (1.7.8)$$

设于是令 $n \rightarrow \infty$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a|) = 0 \quad (1.7.9)$$

由于

$$0 \leq |a_n - a| \leq |a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \quad (1.7.10)$$

$$0 \leq |a_{n-1} - a| \leq \frac{1}{\lambda}|a_n - a| + |a_{n-1} - a| \quad (1.7.11)$$

因此我们可以知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.

从上述推导过程中可以看到, 其实也可以允许 p, q 小于 0 的, 但是要增加条件. 即一方面求根公式时, 根式下方的东西要大于等于 0, 即 $p^2 + 4q \geq 0$, 另一方面 $p < 2$, 且 $q \neq 0$. \square

推论 1.7.2: 高阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果从某项开始, 满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a| \quad (1.7.12)$$

其中 $\sum_{i=1}^m p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

使用连续函数的介值性解特征方程即可.

证明详见: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/1961736760292796066>.

题目 1.7.1. 设 $x_0 \in (1, \frac{3}{2}), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$, 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1 < x_n \leq 4$ 假设 $\{x_n\}$ 极限存在为 $x \geq 1$, 则 $x = \sqrt{x} + \frac{x}{2}$, $x = 0$ (舍去) 或 $x = 4$.

由于:

$$|x_{n+1} - x| = \left| \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} - \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right| \leq |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (1.7.13)$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (1.7.14)$$

$$< \frac{1}{3}|x_n - x| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \quad (1.7.15)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 2$.

1.8 关于不动点的再讨论

对于压缩映射-3 中定义的 $x_{n+1} = f(x_n)$. 如果我们能够得到 $f(x)$ 的单调性, 那么我们能否得到数列 $\{x_n\}$ 的单调性呢? 答案是肯定的! 下面我们具体分析一下:

如果 $f'(x) \geq 0$, 即 $f(x)$ 单调递增, 那么假设 $x_2 \geq x_1$, 则有 $x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2$, 以此类推, 可得到 $x_{n+1} \geq x_n$; 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = f(x_2) \leq f(x_1) = x_2$, 以此类推, 可得到 $x_{n+1} \leq x_n$. 即如果已经知道 $f(x)$ 单调递增, 那么数列 $\{x_n\}$ 的单调性之与前两项 x_1 和 x_2 的大小有关了.

如果 $f'(x) \leq 0$, 即 $f(x)$ 单调递减, 那么假设 $x_2 \geq x_1$, 则有 $x_3 = f(x_2) \leq f(x_1) = x_2, x_4 = f(x_3) \geq f(x_2) = x_3$, 以此类推, 可知 $x_{2n} \geq x_{2n-1}, x_{2n+1} \leq x_{2n}$. 若 $x_2 \leq x_1$, 则 $x_3 = f(x_2) \geq f(x_1) = x_2, x_4 = f(x_3) \leq f(x_2) = x_3$ 以此类推, 可知 $x_{2n} \leq x_{2n-1}, x_{2n+1} \geq x_{2n}$.

更进一步, 如果我们知道了 x_1 和 x_3 之间的大小关系, 假设 $x_1 \leq x_3$, 那么 $x_4 = f(x_3) \leq f(x_1) = x_2, x_5 = f(x_4) \geq f(x_2) = x_3$, 不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递减, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递增. 若 $x_1 \geq x_3$, 那么 $x_4 = f(x_3) \geq f(x_1) = x_2, x_5 = f(x_4) \leq f(x_2) = x_3$, 不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递减.

事实上, 由于 $f(x)$ 单调递减, 那么 $F(x) = f(f(x))$ 单调递增, 那么 $F(x_n) = f(f(x_n)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$, 使用刚才的结论可知数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的单调性和 x_1 与 x_3 的大小有关.

因此我们有以下推论:

推论 1.8.1

设 a 为 f 的不动点, f 在 $x = a$ 点连续, 在 $U(a, r)$ 中严格单调递增, 且在 $(a-r, a)$ 上有 $f(x) > x$, 在 $(a, a+r)$ 上有 $f(x) < x$, 证明: 若 $a_{n+1} = f(a_n)$, 且 $a_1 \in U^o(a, r)$, 则 $\{a_n\}$ 严格单调, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明. 首先, $x = a$ 为 f 在 $U(a, r)$ 上的唯一不动点, 设 $a_1 \in (a-r, a)$, 则 $a_2 = f(a_1) < f(a) = a$, 故 $a_1, a_2 \in (a-r, a)$, 则 $a_2 = f(a_1) > a_1$, 即 $a_1 < a_2 < a$. 以此类推可知 $a_n < a$, 且 $\{a_n\}$ 单调递增并有上界, 且极限为 a (因为唯一不动点).

同理, 设 $a_1 \in (a, a+r)$, 则 $a_2 = f(a_1) > f(a) = a$, 故 $a_1, a_2 \in (a, a+r)$, 则 $a_2 = f(a_1) < a_1$, 即 $a < a_2 < a_1$. 以此类推可知 $a_n > a$, 且 $\{a_n\}$ 单调递减并有下界, 且极限为 a . \square

题目 1.8.1. 设 $x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. 问: b 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛? 并求极限值.

解: 首先解 $x = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, 得 $x = 1$, 因此数列 $\{x_n\}$ 如果收敛, 只能以 1 为极限. 令 $f = \frac{1}{2}(x^2 + 1), f'(x) = x$, 故 f 在 $x < 0$ 单调递减, 在 $x \geq 0$ 单调递增. 在 $(0, 1)$, 有 $f(x) < 1$, 在 $(1, +\infty)$, 有 $f(x) > 1$.

又由于 $x_1 = b$ 和 $x_1 = -b$ 对极限没有影响, 因此可以假定 $b \geq 0$, 最后再对称区间即可, 那么 $x_n \geq 0$.

当 $0 \leq b \leq 1$ 时, $1 \geq qx_2 = \frac{b^2+1}{2} \geq qb = x_1, 1 \geq qx_3 = f(x_2) \geq qf(x_1) = x_2$, 归纳可知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 故收敛, 且以 1 为极限.

当 $b > 1$ 时, $x_n > 1$, 但 $x_2 = \frac{b^2+1}{2} > b = x_1$, 以此递推, 仍能得到 $\{x_n\}$ 单调递增, 但 $x_n > 1$, 故 $\{x_n\}$ 不会以 1 为极限, 那么 $\{x_n\}$ 发散.

因此 $-1 \leq b \leq 1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限值为 1, 其余情况发散.

1.9 函数形式的 Stolz 定理

除了数列, 其实函数也有 Stolz 定理, 不过不经常使用. 因此放到最后供查阅和有能力的同学学习.

定理 1.9.1: Stolz 定理的函数形式

- $(\frac{*}{\infty})$ 若 $T > 0$ 为常数, 且满足:
 1. $g(x+T) > g(x), \forall x \geq a$;
 2. $g(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$, 且 f, g 在 $[a, +\infty)$ 内闭有界;
 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
- $(\frac{0}{0})$ 若 $T > 0$ 为常数, 且满足:
 1. $0 < g(x+T) < g(x), \forall x \geq a$;
 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;
 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

由上述定理, 我们可以推出 Cauchy 定理:

定理 1.9.2: Cauchy 定理

若 f 在 $(a, +\infty)$ 内有定义, 且内闭有界, 则

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ ($f(x) \geq c > 0$), 当右边极限存在时成立.

证明. 1. 取 $g(x) = x, T = 1$, 则满足:

- $g(x+1) > g(x), \forall x \geq a$;
- $g(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$, 且 f, g 在 $[a, +\infty)$ 内闭有界;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.

因此我们有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.

2. 首先, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}}$. 又由于 $f(x) > 0$, 且满足函数的 Stolz 定理, 可得:

$$e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x+1)) - \ln(f(x))}{x+1-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (1.9.1)$$

□

第 2 章 实数的完备性

直观上，实数完备性意味着实数轴上没有“间隙”（以理查德·戴德金的说法）。这是实数区别于有理数的特点，有理数在数轴上是有间隙的，即无理数。在十进制计数法下，实数的完备性等价于：实数与一个十进制小数表示一一对应。一般情况下我们认为实数的完备性主要有 8 个定理（当然也有人说 10 个，参见<https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870>），其中 6 个最为重要（和书上一致），下面我将叙述 8 个定理的版本，并将所有定理一一罗列出来：

2.1 实数完备性定理

定义 2.1.1: Dedekind 分割

将实数集 \mathbf{R} 分为两个子集 S 和 T ，且满足：

(1) $S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$;

(2) $\mathbf{R} = S \cup T$;

(3) $\forall x \in S, \forall y \in T$ ，总有 $x < y$ ，其中 S 称为左集， T 称为右集。

由上述定义得到的对实数集 \mathbf{R} 的一个分割称为 **Dedekind 分割**，记作 (S, T) 。

定理 2.1.1: Dedekind 定理

实数集 \mathbf{R} 的任一 Dedekind 分割 (S, T) ，都唯一地确定一个实数（称为中介数或中介点），它或者是 S 的最大数（此时 T 中无最小数），或者是 T 的最小数（此时 S 中无最大数）。

定理 2.1.2: 确界原理

对于非空数集 S ，如果它有上界，则必有上确界；如果它有下界，则必有下确界。

定理 2.1.3: 致密性定理

有界数列必有收敛子列。

定理 2.1.4: 单调有界定理

单调（从某项开始单调即可）且有界（递增只需有上界；递减只需有下界）的数列必收敛。

定理 2.1.5: Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是： $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ ，对 $\forall m, n > N$ ，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 。

定理 2.1.6: 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

那么在 \mathbf{R} 中唯一地存在一点 ξ , 使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad (2.1.1)$$

定义 2.1.2: 聚点 (极限点) - 1

设 S 为数轴的点集, ξ 为某一确定的点. 如果 ξ 的任何邻域都含有 S 的无穷多个点, 则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2.1.3: 聚点 (极限点) - 2

对于点集 S , 若点 ξ 的任何 ε 邻域都含有 S 中异于 ξ 的点, 即 $U^\circ(\xi, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, 则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2.1.4: 聚点 (极限点) - 3

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$, 则其极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

定理 2.1.7: Weierstrass 聚点定理

\mathbf{R}^n 中任何有界无穷点集至少有一个聚点.

定义 2.1.5: 开覆盖

对于一个数集 S , 以及由一些互不相等 (可有非空交集) 的开区间 (不为无穷区间) 组成的点集

$$H = \bigcup_{k=1}^n S_k \quad (2.1.2)$$

若满足 $S \subset H$, 则称 H 为 S 的一个开覆盖. 当 n 为有限数时, 称为有限开覆盖, $n = \infty$ 时称为无限开覆盖.

定理 2.1.8: Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖.

一般情况下, 证明有限覆盖定理需要使用反证法, 而从有限覆盖定理证明其它定理则需要根据一些性质构造开覆盖. 而使用闭区间套定理证明某些性质时, 往往采用二分法分割区间.

2.2 例题

题目 2.2.1. 证明对任意实数 α , 均存在一个有理数列 a_n , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

证明. 取 $a_n = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$ 即可. □

题目 2.2.2. 证明有理数集 \mathbb{Q} 是不完备的.

证明. 同上题, 如果我们取 $\alpha = \pi$, 虽然 a_n 趋向于 π , 但在 \mathbb{Q} 里找不到一个数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$. □

由于实数完备性等价定理较多, 难度较大, 因此不可能把所有的用法和证明详细写出来. 下面, 我仅列举一些重要的题目, 以示实数完备性定理的应用:

题目 2.2.3. 用闭区间套定理证明零点定理.

[分析]: 零点定理, 指的是连续函数 $f(x)$ 如果在闭区间 $[a, b]$ 的端点处取值异号, 那么 f 在区间内至少含有一个零点. 因此, 我们想办法找到某一点, 使得 $f^2(\xi) \leq 0$, 那么就能得到 $f(\xi) = 0$.

证明. 设 $f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$, 那么我们取 $a_1 = a, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$, 为第一个闭区间. 取 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, 若 $f(c_1) = 0$, 则已经得证, 否则可以在 $f(a)f(c_1)$ 和 $f(c_1)f(b)$ 中找到一个小于 0 的表达式, 不妨设 $f(a)f(c_1) < 0$, 取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, I_1 = [a_2, b_2]$, 依次类推. 如果找不到一个 $f(c_i) = 0$, 那么我们可以得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$;
- (3) $f(a_n)f(b_n) < 0$.

那么由闭区间套定理知, 唯一存在一个点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

于是

$$f^2(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \tag{2.2.1}$$

□

也即 $f(\xi) = 0$.

题目 2.2.4. 用闭区间套定理证明聚点定理.

证明. 由于 S 为有界点集, 那么存在 $M > 0$, 使得 $S \subset [-M, M]$. 记 $a_1 = -M, b_1 = M$. 仿照上题取 $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个含有 S 中无穷个点, 可记为 $[a_2, b_2]$. 同理, 一直这样取下去, 我们可以得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{2^{n-1}} = 0;$$

这是一个闭区间套, 由闭区间套定理, 知存在一点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由极限的定义, 知存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$. 由定义知 ξ 为 S 的一个聚点. \square

题目 2.2.5. 用闭区间套定理证明有限覆盖定理.

解: 反证法: 假设不能用 H 的有限项覆盖 $[a, b]$. 即 $a_1 = a, b_1 = b$, 同理取 $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个不能用 H 的有限项覆盖 $[a, b]$, 可记为 $[a_2, b_2]$. 同理, 一直这样取下去, 我们可以得到一系列闭区间 $[a_n, b_n]$, 满足:

$$(1) [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0;$$

这是一个闭区间套, 由闭区间套定理, 知存在一点 ξ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 由于 H 是一个开覆盖, 那么必存在一个区间 $(\alpha, \beta) \in H$, 使得 $\xi \in (\alpha, \beta)$. 由极限的定义, 知存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$. 这与 $[a_n, b_n]$ 的选取矛盾! 故原命题成立.

题目 2.2.6. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

证明. 设 $f(x) \in C[a, b]$. 首先, 对于闭区间上的一点 $x_0 \in [a, b]$, 我们有 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_{x_0})$ 是有界的 (根据极限的定义可知), 记界为 M_{x_0} . 当 $x \in U(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]$ 时, 有 $|f(x)| \leq M_{x_0}$. 令

$$H = \{U(x_0, \delta_{x_0}) \mid |f(x)| \leq M_{x_0}, x \in U(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]\} \quad (2.2.2)$$

那么 H 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故存在一个有限子覆盖

$$H' = \{U(x_i, \delta_{x_i}) \mid U(x_i, \delta_{x_i}) \in H, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.2.3)$$

取 $M = \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}\}$, 则 $|f(x)| \leq M$. \square

题目 2.2.7. 用致密性定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

[分析]: 致密性定理, 指的是任何有界的数列必有收敛的子列. 如果采用正面直接证明法, 我们不知道收敛数列的极限值, 因此可能会遇到一些困难, 故我们采用反证法.

证明. 反证法. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 但对任意 $M > 0$, 存在 $\{x_n\} \in [a, b]$, 使得 $|f(x_n)| > M$.

取其收敛子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0 (k \rightarrow \infty)$, 则 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) (k \rightarrow \infty)$.¹

那么由连续函数的局部有界性, 知 $f(x_{n_k})$ 有界 (否则不会收敛到 $f(x_0)$). 但这与 $|f(x_{n_k})| > M$ 矛盾! 故原命题得证. \square

¹由于 f 的连续性

第 3 章 上下极限

上下极限的用处非常大，只要数列有界，那么就有上下极限，因此可以通过上下极限求极限。

3.1 定义

上下极限的定义依附于聚点的定义，因此我们先介绍一下数列的聚点的定义：

定义 3.1.1：数列的聚点

若数 a 的任一邻域含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点。

注：这里无限多项指的是数列的项，而不是数字。也就是说，如果 $x_n = 1$ ，那么 1 就是数列的聚点。

从聚点的定义可以看出，如果一个数列 $\{x_n\}$ 有极限 a ，那么该极限一定是数列 $\{x_n\}$ 的聚点。

那我们自然会问，如果数列极限不存在呢？比如非正常极限 ∞ （无界），或者是有界的数列 $(-1)^n$ 等，我们又该如何处理呢？

我们首先讨论有界的数列。依聚点的定义，我们知 $(-1)^n$ 有两个聚点 -1 和 1 ， $\sin \frac{n\pi}{4}$ 有五个聚点 $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ 。由于这些数列都是有界的，因此我们猜测有界的数列必有聚点，即使极限不存在。事实也的确如此：

定理 3.1.1：有界数列聚点存在和最值性

对于有界数列 $\{x_n\}$ 至少含有一个聚点，且存在最大聚点和最小聚点。

证明。因数列有无穷多项，因此可以使用闭区间套定理，每次二分区间，选择含有无穷多项的区间 $[a_k, b_k]$ ，可得到一个闭区间套，故可知聚点存在。

下面证明最值性，对于最大聚点，只需在选择区间时，优先选择右侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取左边的区间，由此得到的为最大聚点。若不然，还存在更大的聚点 $\xi' > \xi$ ，则取 $\delta = \frac{1}{3}(\xi' - \xi) > 0$ ，则在 $U(\xi', \delta)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项¹，但 n 充分大时， $U(\xi', \delta)$ 全部落在 $[a_n, b_n]$ 右侧，这与优先选取右侧区间步骤相矛盾，故 ξ 为最大区间。

对于最小聚点也同理，优先选择左侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取右边的区间，由此得到的为最小聚点。□

对于最大聚点和最小聚点，我们分别称为上极限和下极限。

¹依聚点的定义可知。

定义 3.1.2: 上下极限

有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点 L 和最小聚点 l 分别称为上极限和下极限, 并记作

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (3.1.1)$$

因此有界数列一定有上下极限. 下面我们介绍一下上下极限的几个重要的定理, 以便后续使用.

定理 3.1.2: 上下极限不等式

对于有界数列 $\{x_n\}$, 我们有:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (3.1.2)$$

证明. 依上下极限的选取可知该定理成立. □

定理 3.1.3: 数列收敛的充要条件

有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (3.1.3)$$

证明. (\Rightarrow) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $\{x_n\}$ 只有一个聚点 A^2 , 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(\Leftarrow) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 由上下极限的选取, 可知仅能选取一个聚点 A , 但又由聚点的定义和数列收敛的定义, 知 A 即为 $\{x_n\}$ 的极限值. □

定理 3.1.4: 上下极限的保不等式

设有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 且从某项起, 有 $a_n \leq b_n$, 则:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (3.1.4)$$

又若存在 $\alpha \leq \beta$, 且从某项起, 有 $\alpha \leq a_n \leq \beta$, 则:

$$\alpha \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \beta \quad (3.1.5)$$

注: 不要认为也满足 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$. 我们可以构造一个反例, 令

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} 2, & n \text{ 为奇数} \\ 0.5, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

²数列收敛的等价定义

虽然 $a_n \leq b_n$, 但 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

推论 3.1.1

对于有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 我们有:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (3.1.7)$$

现在我们处理无界数列的情况. 我们发现, 如果将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点, 那么它也满足聚点的定义. 即 $+\infty, -\infty$ 可能是无界数列的聚点. 对于这样形成的上下极限, 我们称之为非正常上下极限, 记法和一般的上下极限类似.

定义 3.1.3: 非正常上下极限

假设 $+\infty$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限, $-\infty$ 为数列 b_n 的下极限, 那么:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty \quad (3.1.8)$$

在一般的讨论中, 我们一般只讨论正常的上下极限, 如非特别说明, 下面考虑的上下极限均为有界数列的 (正常) 上下极限.

除此之外, 上下极限还有另外一种定义:

定义 3.1.4: 上下极限确界定义

设 $\{x_n\}$ 为有界实数列, 则有:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{x_k\} = \inf_n \sup_{k \geq n} \{x_k\}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \{x_k\} = \sup_n \inf_{k \geq n} \{x_k\} \quad (3.1.9)$$

注: 使用上确界数列不减 (递减), 下确界不减 (递增) 的性质可证上述等式成立.

注: 由上式可以看出, 数列 $\{x_n\}$ 的上极限, 就是 $\{x_k\}, k \geq n$ 的上确界的极限 (上确界的下确界); 数列 $\{x_n\}$ 的下极限, 就是 $\{x_k\}, k \geq n$ 的下确界的极限 (下确界的上确界).

3.2 Stolz 定理下极限形式

除了极限形式的 Stolz 定理, 也存在上下极限形式的 Stolz 定理.

定理 3.2.1: 上下极限形式的 Stolz 定理

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$. 若 $\{y_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$, 则有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (3.2.1)$$

证明. 只需证明第一个不等式和第三个不等式即可. 下面仅证第三个不等式:

设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = M$, 则存在 $N, \varepsilon = \varepsilon(n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq M + \varepsilon \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \leq (y_{n+1} - y_n)(M + \varepsilon) \quad (\text{注意 } y_n \text{ 严格单调}) \quad (3.2.2)$$

那么

$$\sum_{k=N}^n (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=N}^n (y_{k+1} - y_k)(M + \varepsilon) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_N \leq (y_{n+1} - y_N)(M + \varepsilon) \quad (3.2.3)$$

因此

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \left(1 - \frac{y_N}{y_{n+1}}\right)(M + \varepsilon) + \frac{y_N}{y_{n+1}} \leq M + k\varepsilon \quad (3.2.4)$$

两边同时取上极限, 且由 ε 的任意性, 得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. □

注: 也可以这样理解, 如取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(M + \frac{k}{n}\right) = M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (3.2.5)$$

3.3 上下极限的一些例题

上下极限虽然方便和实用, 但是很容易出错, 首先由前面几个定理和推论可以看出, 整体的上(下)极限, 并不等于分开的式子取上(下)极限之后再求和. 另外, 我们再给出几个等式, 并在下面给出一些上下极限的例题.

推论 3.3.1: 上下极限等式

设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 则

- 加负号反转上下极限: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n)$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n)$;
- 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 当 $x_n \geq 0$ 时, 有 $\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n^2$;
- 若 $f(x)$ 严格单调递增且 $f(x_n) > 0$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) > 0$ 恒成立, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n)} \quad (3.3.1)$$

一个特殊的例子就是取 $f(x) = x, x_n > 0, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, 我们得到:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n} \quad (3.3.2)$$

- 若 $f(x)$ 严格单调递增且连续, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (3.3.3)$$

特别地, 若 $f(x) \in C(a, b]$ 但在左端点不一点连续, $x_n \in (a, b]$, 若满足 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n > a$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (3.3.4)$$

若满足 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n > a$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (3.3.5)$$

- 若 $f(x)$ 严格单调递减且连续, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (3.3.6)$$

特别地, 若 $f(x) \in C(a, b]$ 但在左端点不一点连续, $x_n \in (a, b]$, 以及 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n > a$, 那么我们仍有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (3.3.7)$$

注: 设 $\{x_n\}$ 为区间 I 上的有界数列, 函数 f 在 I 上连续. 对于一般的极限, 只要函数连续, 即可和

极限交换顺序. 但对于上下极限, 即使函数连续, 上下极限也不能随便和函数交换顺序, 即

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \quad (3.3.8)$$

当函数严格单调连续且有界 (闭区间连续则显然有界) 时可以交换顺序. 单调递增符号不变, 单调递减上下极限符号反转.

题目 3.3.1. $x_n > 0, y_n > 0$ 且均有上界, 试证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3.3.9)$$

当 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 的极限存在时取等.

[分析]: 直接证明两项相乘的式子似乎不太好证明, 我们可以尝试将乘法变为加法, 然后使用我们已知的加法的结论去证明. 本题主要考虑使用对数函数, 将乘法变为加法再进行证明.

证明. 1° 当某个数列上极限为 0 时, 不妨设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 由于 $0 \leq l_x \leq L_x = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 又 $0 < x_n y_n < M \cdot x_n$ ($M > 0$), 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3.3.10)$$

2° 当两个数列上极限均不为 0 时, 那么我们有:

$$\ln \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\ln x_n + \ln y_n) \quad (3.3.11)$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \ln \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \ln \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3.3.12)$$

$$= \ln \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \quad (3.3.13)$$

这说明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3.3.14)$$

当且仅当 $\ln x_n$ 或 $\ln y_n$ 极限存在时取等, 也即 x_n 或 y_n 极限存在且大于 0.

证毕. □

题目 3.3.2. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 首先, 易见 $1 \leq x_n \leq 2$ ($n \geq 3$). 设 L, l 分别为 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限, 则

$$L = 1 + \frac{1}{l}, \quad l = 1 + \frac{1}{L} \quad (3.3.15)$$

可知 $L = l$, 则 $\{x_n\}$ 收敛, 设收敛到 x , 则 $x = 1 + \frac{1}{x}$, 得 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

题目 3.3.3. 有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} + 2a_n) = 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 首先 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

设 $|a_n|$ 的上下极限分别为 L, l , 那么:

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2a_n + a_{2n}| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|2a_n| - |a_{2n}|) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2a_n| + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-|a_{2n}|) \quad (3.3.16)$$

$$= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2a_n| - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_{2n}|) \quad (3.3.17)$$

$$= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| + \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_{2n}|) \right) \quad (3.3.18)$$

$$\geq L \quad (3.3.19)$$

但 $L \geq 0$, 因此只能 $L = l = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

题目 3.3.4. 设 $x_0 \in (1, \frac{3}{2}), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_n - 1}{2}$, 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1 < x_n \leq 4$. 那么:

$$L \leq \sqrt{L} + \frac{L}{2}, l \geq \sqrt{l} + \frac{l}{2} \quad (3.3.20)$$

则 $L = l = 4$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

我们之前提到过:

对于任意的数列 $\{a_n\}$, 以及一个确定的实数 a , 如果从某项开始, 满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a| \quad (3.3.21)$$

其中 $\sum_{i=1}^m p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

[分析]: 我们考虑 $|a_n - a|$ 这个数列, 如果想要使用上下极限证明, 那么一定要先证明该数列有界, 然后注意上下极限的不等式, 进而推得结论.

我们现在使用上下极限证明一下:

证明. 首先, 我们假设从 $n > N$ 开始, 满足

$$|a_n - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{n-i} - a|$$

取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \dots, |a_N - a|\}$, 那么 $|a_i - a| \leq M (i = 1, 2, \dots, N)$.

使用第二数学归纳法, 假设 $|a_k - a| \leq M$, 那么

$$|a_{k+1} - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i |a_{k-i} - a| \leq \sum_{i=1}^m p_i M < M \quad (3.3.22)$$

故有 $|a_n - a|$ 有界. 设其上下极限分别为 L, l , 则:

$$L \leq \sum_{i=1}^m p_i L \Leftrightarrow \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i\right) L \leq 0 \quad (3.3.23)$$

因此 $L = 0, 0 \leq l \leq L = 0$, 故 $L = l = 0$, 因此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

题目 3.3.5. 设 $a_1 = a > 0, a_2 = b > 0, a_{n+2} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 易证 $2 \leq a_n \leq \frac{5}{2} (n \geq 3)$. 设 $x = 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$, 即 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 = 0$, 限制 $x \in [2, \frac{5}{2}]$.

又 $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) > 0$, 故单调, 且 $f(2)f(\frac{5}{2}) < 0$, 即存在唯一 $x_0 \in (2, \frac{5}{2})$, s.t. $f(x_0) = 0$, 即 $x_0 = 2 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}$.

那么

$$|a_{n+2} - x_0| = \left| 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} - 2 - \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| = \left| \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| \quad (3.3.24)$$

$$\leq \left| \frac{(a_{n+1} - x_0)(a_{n+1} + x_0)}{x_0^2 a_{n+1}^2} \right| + \left| \frac{(a_n - x_0)(a_n + x_0)}{x_0^2 a_n^2} \right| \quad (3.3.25)$$

$$\leq \frac{5}{16} |a_{n+1} - x_0| + \frac{5}{16} |a_n - x_0| \quad (3.3.26)$$

设 L, l 分别为 $b_n = |a_n - x_0|$ 的上下极限, 则

$$0 \leq l \leq L \leq \frac{5}{16} L + \frac{5}{16} L = \frac{5}{8} L \quad (3.3.27)$$

故 $L = l = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. □

题目 3.3.6. 设 $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$, 对于 $n \geq 0$, 定义:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \end{cases}$$

证明:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$;
- (2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

[分析]: 第一问我们考虑压缩映射. 因为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 结构相似, 我们猜测 $x_n - y_n$ 的极限为 0. 对于第二问, 我提供了多种不同方向的思路, 主要工具就是上下极限.

证明. (1)

首先, $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$. 那么 $x_n, y_n \in [0, 1] (\forall n \geq 1)$. 当 $n \geq 1$ 时, 有:

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \left| \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} - \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \right| \quad (3.3.28)$$

$$= \left| \frac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} \right| \quad (3.3.29)$$

$$\leq \frac{x_n + y_n}{(x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)(2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1)} |x_n - y_n| \quad (3.3.30)$$

$$\leq \frac{x_n + y_n}{1 + 3x_n^2 + 2x_n y_n + 3y_n^2} |x_n - y_n| \quad (3.3.31)$$

$$\leq \frac{x_n + y_n}{1 + 2x_n^2 + 4x_n y_n + 2y_n^2} |x_n - y_n| \quad (3.3.32)$$

$$\leq \frac{1}{2} |x_n - y_n| \quad (3.3.33)$$

$$(3.3.34)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$.

(2) 设 L, l 分别为数列 $\{x_n\}$ 的上下极限, 那么 $0 \leq l \leq L \leq 1$. 由于 $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, 故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + L = L, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + l = l \quad (3.3.35)$$

下面给出两种方法证明 $\{x_n\}$ 极限存在.

法一 (原创): 我们直接对第一个递推关系式取上下极限, 会得到如下结果:

$$L = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} \leq \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n + 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n^2 + 1} \quad (3.3.36)$$

$$\leq \frac{1}{l^2 + l \cdot l + 2l^2 + 1} = \frac{1}{4l^2 + 1} \quad (3.3.37)$$

以及

$$l = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1)} \geq \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n + 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n^2 + 1} \quad (3.3.38)$$

$$\geq \frac{1}{L^2 + L \cdot L + 2L^2 + 1} = \frac{1}{4L^2 + 1} \quad (3.3.39)$$

那么有:

$$L \leq \frac{1}{4L^2 + 1} \leq \frac{1}{4 \left(\frac{1}{4L^2 + 1} \right)^2 + 1} \Leftrightarrow (4L^2 + 1)^2 (L - 1) + 4L \leq 0 \quad (3.3.40)$$

$$l \geq \frac{1}{4L^2 + 1} \geq \frac{1}{4 \left(\frac{1}{4l^2 + 1} \right)^2 + 1} \Leftrightarrow (4l^2 + 1)^2 (l - 1) + 4l \geq 0 \quad (3.3.41)$$

令 $f(x) = (4x^2 + 1)^2 (x - 1) + 4x$. 下面通过三个分支继续求解:

分支一：注意到

$$\begin{aligned}
 (4L^2 + 1)^2(L - 1) + 4L &= (4L^2 - 1 + 2)^2(L - 1) + 4L \\
 &= (4L^2 - 1)^2(L - 1) + 4(4L^2 - 1)(L - 1) + 4(2L - 1) \\
 &= (2L - 1) [(2L - 1)(2L + 1)^2(L - 1) + 4(2L + 1)(L - 1) + 4] \\
 &= (2L - 1) [(2L - 1)(2L + 1)^2(L - 1) + 4L(2L - 1)] \\
 &= (2L - 1)^2 [(2L + 1)^2(L - 1) + 4L] \\
 &= (2L - 1)^2 [(2L - 1 + 2)^2(L - 1) + 4L] \\
 &= (2L - 1)^2 [(2L - 1)^2(L - 1) + 4(2L - 1)(L - 1) + 4(2L - 1)] \\
 &= (2L - 1)^3 [(2L - 1)(L - 1) + 4(L - 1) + 4] \\
 &= (2L - 1)^3(2L^2 + L + 1)
 \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

可知 $x = \frac{1}{2}$ 为 $g(x) = 0$ 的唯一实根（三重根），且可看出， $f(x)$ 单调递增，故可得 $L \leq \frac{1}{2}$. 同理 $l \geq \frac{1}{2}$ ，那么只能 $L = l = \frac{1}{2}$ ，因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

分支二：首先，注意到 $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根，且

$$f'(x) = 16x(x - 1)(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)^2 + 4 \tag{3.3.43}$$

$$f''(x) = 16(3x - 1)(4x^2 + 1) + 128x^2(x - 1) \tag{3.3.44}$$

$$f'''(x) = 960x^2 - 384x + 48 \tag{3.3.45}$$

注意到 $f'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 0, f'''(\frac{1}{2}) \neq 0$.

故 $f(x) = (x - 1)^3 g(x)$ ， $g(x)$ 为二次多项式，且 $g(\frac{1}{2}) \neq 0$. 通过待定系数法或多项式除法，可得 $g(x) = 2x^2 + x + 1$. 剩余步骤和分支一一致.

分支三：首先，注意到 $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根，且

$$f'(x) = 16x(x - 1)(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)^2 + 4 \tag{3.3.46}$$

$$f''(x) = 16(3x - 1)(4x^2 + 1) + 128x^2(x - 1) \tag{3.3.47}$$

$$f'''(x) = 960x^2 - 384x + 48 \tag{3.3.48}$$

注意到 $f'(\frac{1}{2}) = f''(\frac{1}{2}) = 0$. $\Delta = 384^2 - 4 \cdot 960 \cdot 48 = -36864 < 0$ ，因此 $f'''(x) > 0$ 恒成立，也即 $f''(x)$ 单调递增. 由于 $f''(\frac{1}{2}) = 0$ ，因此在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ ， $f''(x) < 0$ ，在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ， $f''(x) > 0$ ，故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 单调递减，在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增，又由于 $f'(\frac{1}{2}) = 0$ ，故 $f'(x) \geq 0$ 恒成立. 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，那么

$$f(L) \leq 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow L \leq \frac{1}{2} \tag{3.3.49}$$

$$f(l) \geq 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow l \geq \frac{1}{2} \tag{3.3.50}$$

因此 $L = l = \frac{1}{2}$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

分支四：已知等价为：

$$L(4l^2 + 1) \leq 1, \quad l(4L^2 + 1) \geq 1 \quad (3.3.51)$$

故

$$L(4l^2 + 1) \leq l(4L^2 + 1) \Leftrightarrow (4Ll - 1)(L - l) \geq 0 \quad (3.3.52)$$

若 $L \neq l$, 则 $4Ll \geq 1$, 以及 $1 \geq L(4l^2 + 1) = 4Ll \cdot l + L \geq L + l$.

因此

$$(L + l)^2 = L^2 + 2Ll + l^2 \leq 1 \leq 4Ll \Rightarrow (L - l)^2 \leq 0 \quad (3.3.53)$$

只能 $L = l$. 最后再考虑 $g(x) = 4x^3 + x - 1, g(l) = g(L) = 0^3$, 易知其单调递增, 且 $g(\frac{1}{2}) = 0$, 则 $L = l = \frac{1}{2}$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

法二 (官方答案): 首先, 我们有:

$$(x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 3x_n^2 - x_n y_n - 2y_n^2 = 4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) \quad (3.3.54)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 0 \quad (3.3.55)$$

又由于

$$2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1 = (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) - (y_n^2 - x_n^2) \quad (3.3.56)$$

故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4l^2 \quad (3.3.57)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4l^2 \quad (3.3.58)$$

那么

$$L = \frac{1}{4l^2 + 1}, \quad l = \frac{1}{4L^2 + 1} \quad (3.3.59)$$

也即 $4L^2 + 1 = \frac{1}{l}, 4l^2 + 1 = \frac{1}{L}$, 故

$$l(4L^2 + 1) = L(4l^2 + 1) = 1 \quad (3.3.60)$$

若 $L \neq l$, 则 $4Ll = 1, L + l = 1$, 解得 $L = l = \frac{1}{2}$ 矛盾, 因此 $L = l = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$. \square

³把 $L = l$ 代入上述 (3.3.51) 可得.

注: 方法一不能取等, 是因为没有证明

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) &= 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4l^2 \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) &= 4L^2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4l^2 \end{aligned}$$

因此只能得到关于上下极限的不等式.

另外, 上下极限也有一些无法做的题目, 比如定义的数列形如 $x_{n+1} = x_n + o(1)$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} o(1) = 0$, 对其取上下极限只能得到恒等式, 对做题没帮助.

题目 3.3.7. 定义 $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n^2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 事实上, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.3.61)$$

有时候, 虽然上下极限不能直接证明结论得到结果, 但却能在中间起辅助作用.

题目 3.3.8. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 \leq x_{n+2} \leq \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

解: 易得

$$y_{n+1} = 2x_{n+2} + x_{n+1} \leq 2x_{n+1} + x_n = y_n \quad (3.3.62)$$

由数学归纳法, 知 $0 \leq x_n \leq M$ (M 为一固定的常数). 故 $\{y_n\}$ 单调递减且有界, 则收敛, 设极限值为 y_0 . 设 $\{a_n\}$ 的上、下极限分别为 L, l , 又由于 $x_n = y_n - 2x_{n+1}$, 则:

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n - 2x_{n+1}) = y_0 - 2l, \quad l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n - 2x_{n+1}) = y_0 - 2L \quad (3.3.63)$$

解得 $L = l = \frac{y_0}{3}$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

注: 如果我们直接对 y_n 取上、下极限, 则只能得到 $y_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_{n+2} + x_{n+1}) \leq 2L + L = 3L$, $y_0 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2x_{n+2} + x_{n+1}) \geq 2l + l = 3l$.

从表面看起来, 上下极限比极限要求更弱, 因此能通过普通极限去做的题目, 一定能使用上下极限做. 反之, 由于收敛的充要条件 (上下极限相等), 虽然能做出来, 但可能会比较困难. 上下极限和普通的极限有很大区别, 因此有时候的结论可能并不显然, 甚至是错误的, 因此读者需要严格遵守定理、推论中的公式进行计算, 而不是通过自己“臆想”公式去计算.

当然, 我们鼓励读者对定理、推论等进行推广证明, 尝试发现新的公式.

第 4 章 数项级数

从本章开始,我们将逐步介绍一个新的知识——级数.事实上,级数的定义并不复杂,你甚至可以认为它是数列部分和的一个推广.不过在本章,我们讨论更多的内容,包括级数的敛散性判别法,级数和以及部分拓展内容.

4.1 级数的定义

我们给出级数的定义:

定义 4.1.1: 数项级数

设 $a_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 为数列, 则

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (4.1.1)$$

称为级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 或 $\sum a_n$.

同数列类似,级数也有收敛和发散一说,即若 (4.1.1) 收敛到一个确定的常数,则称级数 $\sum a_n$ 收敛,否则称级数 $\sum a_n$ 发散.

级数的性质可以用其部分和描述,记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_n$ 为级数 $\sum a_n$ 的部分和数列.

定理 4.1.1: 级数敛散性等价刻画

数列 $\{S_n\}$ 的敛散性和级数 $\sum a_n$ 的敛散性一致, 即

$$\text{数列 } S_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}, \text{ 数列 } S_n \text{ 发散} \Leftrightarrow \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \quad (4.1.2)$$

因此我们可以使用我们之前的一些方法来判断级数 $\sum a_n$ 的敛散性,下面我们推导级数的 Cauchy 收敛准则,来判断级数的敛散性.

定理 4.1.2: 级数收敛的 Cauchy 准则

级数 $\sum a_n$ 收敛的充要条件为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$, 对一切 $p \in N$, 有:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad (4.1.3)$$

证明. 由于数列 $\{S_n\}$ 收敛的充要条件为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$, 对一切 $p \in N$, 有:

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \quad (4.1.4)$$

也即

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

□

定理 4.1.3: 级数收敛的必要条件

级数 $\sum a_n$ 收敛的必要条件是通项趋于 0, 即若 $\sum a_n$ 收敛, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (4.1.5)$$

注: 上述定理的逆否命题成立, 也即如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 或极限不存在, 则级数 $\sum a_n$ 发散.

4.2 正项级数敛散性判别法

定义 4.2.1: 正项级数

我们把通项 $a_n \geq 0$ 的级数称为正项级数.

4.3 正项级数敛散性判别法 (拓展)

4.4 一般项级数敛散性判别法