目录

第 1 章　极限与连续

1.1　单调有界定理

题目 1.1.1.　求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

解:

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\overbrace{1\cdots1}^{n-2\text{个}1}}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}\to1(n\to\infty)$$

定理 1.1.1：　单调有界定理

有界的单调数列必收敛.

题目 1.1.2.　证明单调有界定理.

证明. 不妨设 a_n 单调递增，$a=\sup a_n$. 则由上确界的定义立知 $a_n\leqslant a$，且 $\forall\varepsilon>0,a-\varepsilon<a$，故存在 $N>0$，使得 $a_N>a-\varepsilon$.

故 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 对 $\forall n>N$, 有：

$$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant a<a+\varepsilon \tag{1.1.1}$$

故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. □

题目 1.1.3.　若单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛.(注意与单调有界定理相比较)

证明. **法一:**不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增,只需证明 $\{a_n\}$ 有上界即可. 设子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛,则 $\exists M>0,s.t.a_{n_k}<M$. 但对任意的 k，由于 $k\leqslant n_k$，故 $a_k\leqslant a_{n_k}<M$.

因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

法二：不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 设 $\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=a$. 故 $\forall\varepsilon>0,\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$$

当 $n>n_{K+1}$ 时，存在 $m>n>K+1$，使得 $n<m\leqslant n_m$. 故 $a_{n_{K+1}}<a_n\leqslant a_{n_m}$，也即：

$$-\varepsilon<a_{n_{K+1}}-a<a_n-a\leqslant a_{n_m}-a<\varepsilon$$

也即 $\{a_n\}$ 收敛. □

1.2 Stolz 定理

定理 1.2.1： Stolz 定理

1.($\frac{*}{\infty}$) 设 x_n(严格) 单调递增趋于无穷大，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$$

2.($\frac{0}{0}$) 设 x_n(严格) 单调递减趋于 0，且 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$$

注: 极限等式成立的前提，除了对单调性和极限有要求外，还要求 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ $(*)$ 必须存在（包括非正常极限）. 满足题干条件外，当 $(*)$ 极限为 $+\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=+\infty$；当 $(*)$ 极限为 $-\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=-\infty$.

注: 不能认为 $(*)$ 式极限不存在，则左式极限一定不存在. 例如取 $y_n=(-1)^n, x_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$, 但 $\frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{(n+1)-n}=2\cdot(-1)^{n+1}$ 极限不存在.

注: 在满足特定的条件下才有 Stolz 逆定理 (即使用左式极限推右式). 例如，当 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 和 $(*)$ 极限均存在时，我们可以利用 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 的极限计算 $(*)$ 的极限. 当然，Stolz 逆定理还有一些其它的版本，但比较复杂，目前用不到.

题目 1.2.1. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{(n)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}a_n=a \tag{1.2.1}$$

注: 当 a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 也成立.

题目 1.2.2. 若 $a_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$.

解: 1. 当 $a=0$ 时，有

$$0\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty) \tag{1.2.2}$$

2. 当 $a\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n)}{n}}=e^{\ln a}=a \tag{1.2.3}$$

题目 1.2.3. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}$$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n+1}k^{2020}-\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)} \tag{1.2.4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2020}} \tag{1.2.5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}=\int_0^1 x^{2020}dx=\frac{1}{2021} \tag{1.2.6}$$

题目 1.2.4. 设 $x_{n+1}=\sin x_n, x_1\in(0,\pi)$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n$

解: 显然 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0，故：

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}} \tag{1.2.7}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=3 \tag{1.2.8}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$$

注: 读者可思考一下，在进行计算时，为什么使用 $\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$，而不是 $\frac{x_n^2}{\frac{1}{n}}$？

注: 本题还可以“加边”，即再次使用 Stolz 定理，可以求得 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)=\frac{3}{10}$. 不过不要先着急求，我们再看一个稍微“复杂”一点的题目.

题目 1.2.5. 设 $x_1=1, x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$，求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n}$$

解: 第一步，我们首先求 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{2n}}$. 由于 x_n 单调递增到 ∞[1]，因此我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+x_n}{2x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+\frac{1}{x_n}}{2x_n}=1 \tag{1.2.9}$$

[1] 单调易见，使用反证法可看出趋于无穷

我们得到一个很有用的结论：$x_n \sim \sqrt{2n}, n \to \infty$.

那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n})\ln n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} \tag{1.2.10}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} \tag{1.2.11}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}\right) - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{4} \tag{1.2.12}$$

注: 我们观察计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ 的步骤，发现有多处使用了 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 的结果. 事实上，这是一种做题技巧。

具体来说，我们要使用 Stolz 定理，尤其是递推数列算一个分式的极限的时候，我们尽可能要消去 n(不包括数列 $\{x_n\}$ 中的 n)，换句话说，就是统一变量。把含有 n 的式子尽量化为 $a_n + kn$ 的形式，且也不是分式，这就解释了为什么刚才我们不使用 $\frac{x_n^2}{\frac{1}{n}}$ 来计算.

另外，求解 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 也很自然了. 一方面是使用有理化，把 $\sqrt{2n}$ 变为 $2n$ 时要用到，另一方面把 $\frac{1}{n}$ 化为 $\frac{2}{x_n^2}$ 要用到.

把所有显含 n 的式子转化为数列后，我们可以使用递推关系式统一变量，比如均转化为 x_n. 这样，再使用海涅归结原则，我们只需求解其对应的函数极限即可.

1.3 Cauchy 收敛准则

定理 1.3.1：数列收敛的 Cauchy 准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \tag{1.3.1}$$

上述定理亦可等价为：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $n > N$，和一切 $p \in N^+$，均有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \tag{1.3.2}$$

题目 1.3.1. 若对任意的 $p \in N^+$，都有 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$，那么 $\{a_n\}$ 收敛吗？

解: $\{a_n\}$ 不一定收敛，比如取 $a_n = \sqrt{n}$，那么 $0 \leqslant |a_{n+p} - a_n| = |\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} \to 0(n \to \infty)$

注: 极限不一定存在的原因：题目表述和 Cauchy 收敛定理并不等价，题目是指固定一个 p 后，我们能证明 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$，即找到一个 $N = N(p, \varepsilon)$；而 Cauchy 收敛准则则是固定了 $N = N(\varepsilon)$，再选取 p，此时 N 已经和 p 无关了，因此 Cauchy 收敛准则的要求更高一些.

注: 将 $\lim_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$ 改为 $|a_{n+p}-a_n|\rightrightarrows 0$，即对于 $n\to\infty$ 时，关于 p 一致收敛. 则可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

定义 1.3.1： 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^o(x_0)$ 有定义，如果满足：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{1.3.3}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

定理 1.3.2： 函数极限存在的柯西收敛准则

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^o(x_0,\delta')$ 有定义，我们说它在 $x=x_0$ 处收敛，如果对于 $\varepsilon>0,\exists 0<\delta<\delta'$，使得 $\forall x',x''\in U^o(x_0,\delta)$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{1.3.4}$$

1.4 一致连续

定义 1.4.1： 一致连续

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得任意 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{1.4.1}$$

注: 从直观上来看，柯西收敛准则和一致连续的定义很相似。它们主要的区别是，柯西收敛准则只考虑了 x_0 那一点的性质，而一致连续则考虑了全局的性质.

定理 1.4.1

闭区间上的连续函数一致连续.

定理 1.4.2： 一致连续的可加性

设函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[b,c](a<b<c)$ 一致连续，则 f 在 $[a,c]$ 上一致连续. 且当 $c=+\infty$ 或 $a=-\infty$ 也成立 (相应区间括号要进行修改).

题目 1.4.1. 若 $n\geqslant 2,n\in N^+$，证明:
(1) 函数 $f(x)=x^{1/n}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续；

(2) 函数 $g(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致连续.

证明. 首先，我们有

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \tag{1.4.2}$$

(1) $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\varepsilon$，对任意 $x_1\geqslant q1, x_2\geqslant q1$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有：

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|x_1^{\frac{1}{n}}-x_2^{\frac{1}{n}}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{x_1^{\frac{n-1}{n}}+x_1^{\frac{n-2}{n}}x_2+\cdots+x_2^{\frac{n-2}{n}}x_1+x_2^{\frac{n-1}{n}}}\right| \tag{1.4.3}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}|x_1-x_2|<\varepsilon \tag{1.4.4}$$

这说明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续，又由于 f 在 $[0,1]$ 连续，故一致连续，因此函数 $f(x)=x^{1/n}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,$\forall 0<\delta<\frac{1}{2}$, 存在 $x_1=\frac{1}{\delta^2}>1, x_2=\frac{\delta}{2}+\frac{1}{\delta^2}>1$，即使 $|x_1-x_2|<\delta$，有：

$$|g(x_1)-g(x_2)|=|x_1^n-x_2^n|=|x_1-x_2|(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_2+\cdots+x_1x_2^{n-2}+x_2^{n-1})>\frac{\delta}{2}\cdot\frac{n}{\delta^2}>n>\varepsilon \tag{1.4.5}$$

故函数 $g(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致连续. □

注: 问题 (2) 当然也可取 $x_m=m+\frac{1}{m}, y_m=m$,即使 $\lim_{m\to\infty}(x_m-y_m)=0$, 但 $|x_m^n-y_m^n|>\frac{1}{m}\cdot mn>\varepsilon$.

定义 1.4.2： Lipschitz 连续

对于定义在区间 I 上的实值函数 $f(x)$，如果 $\forall x_1,x_2\in I,\exists L>0$ 使得：

$$|f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2| \tag{1.4.6}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 连续.

题目 1.4.2. 证明 Lipschitz 连续的函数一致连续.

证明. Lipschitz 连续比一致连续条件要强，我们只需书写 Lipschitz 连续的定义，并限制 $|x_1-x_2|<\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，那么有：

$$|f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2|<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon \tag{1.4.7}$$

得证. □

1.5 压缩映射定理

定理 1.5.1： 压缩映射 1

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$a \in \mathbf{R}, r \in (0,1)$，若从某项开始，有：

$$|a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a| \tag{1.5.1}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且以 a 为极限.

证明. 假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始，有 $|a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a|$，那么：

$$0 \leqslant |a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a| \leqslant r^2|a_{n-2} - a| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N}|a_N - a| \to 0(n \to \infty) \tag{1.5.2}$$

得证. □

定理 1.5.2： 压缩映射 2

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$r \in (0,1)$，若从某项开始，有：

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}| \tag{1.5.3}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先，类似地假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始，有 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}|$，那么 $\forall n > N, p \in \mathbf{N}^+$，我们有：

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N}|a_{N+1} - a_N| \tag{1.5.4}$$

以及三角不等式，得到：

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| &(1.5.5)\\
&\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| &(1.5.6)\\
&\leqslant \left(r^{n-N+p+1} + r^{n-N+p} + \cdots + r^{n-N}\right)|a_{N+1} - a_N| &(1.5.7)\\
&= \frac{r^{n-N}(1 - r^{p+2})}{1 - r}|a_{N+1} - a_N| &(1.5.8)\\
&< \frac{r^{n-N}}{1 - r}|a_{N+1} - a_N| \to 0(n \to \infty) &(1.5.9)
\end{aligned}$$

得证. □

定理 1.5.3： 压缩映射 3

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$y = f(x)$ 为定义在区间 I 的可微函数，$x_n \in I$ 且 $x_{n+1} = f(x_n)$. 若存在 $r \in (0,1)$，使得：

$$|f'(x)| \leqslant r < 1 \quad , \quad (x \in I) \tag{1.5.10}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且以 $f(x) = x$（其所有的解称之为**不动点**）的某个解为极限.

证明. 显然 $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|$. 然后使用压缩映射 1 定理即得 $\{x_n\}$ 极限存在.

另外，对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时取极限，得 $f(x) = x$，得证. □

注: 当压缩常数 $r = 1$ 时，上面三个定理一般都不成立，一个易见的例子是，取 $f(x) = x, x_n = n$.

题目 1.5.1. 设函数 $f : [a,b] \to [a,b]$, $|f'(x)| < 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 \in [a,b]$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，且不依赖于 x_1.

[分析]: 我们发现此时压缩常数为 1，无法使用压缩映射了. 而且 $|f'(x)|$ 不一定有连续性，所以不一定有最大值，因此我们需要想办法找到一个连续的函数 $H(x)$，使得 $\max_{x\in[a,b]} |H(x)| < 1$ 恒成立.

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$，则 $g(a) \geqslant 0, g(b) \leqslant 0$，则 $\exists x_0 \in [a,b]$, $s.t.$ $f(x_0) = x_0$. 下面我们证明 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限. 取

$$|H(x)| = \begin{cases} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(\xi)| < 1 & , \ x \in [a,b]\backslash\{x_0\} \\ |f'(x_0)| & , \ x = x_0 \end{cases} \tag{1.5.11}$$

易知 $|H(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $|H(x)| < 1$，那么取 $r = \max_{x\in[a,b]} H(x) < 1$，因此：

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant r|x_n - x_0| \tag{1.5.12}$$

注意上述不等式是使用 $|H(x)|$ 的性质推出的，而不是 Lagrange 中值定理. □

题目 1.5.2. 设函数 $f : [a,b] \to [a,b]$，且满足 $L = 1$ 的 Lipschitz 连续，若：

$$x_1 \in [a,b] \ , \ x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)] \tag{1.5.13}$$

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

证明. 首先，我们有 $a \leqslant x_n \leqslant b$，以及：

$$x - y \leqslant f(x) - f(y) \leqslant y - x \ , \ y \geqslant x \tag{1.5.14}$$

令 $g(x)=\frac{1}{2}\left[x_n+f(x_n)\right]$，对 $\forall y\geqslant x$，有：

$$g(y)-g(x)=\frac{y-x-[f(x)-f(y)]}{2}\geqslant 0 \tag{1.5.15}$$

故 $g(x)$ 单调递增. 由 $x_{n+1}=g(x_n)$，不妨设 $x_2\geqslant x_1$，则 $x_3=g(x_2)\geqslant g(x_1)=x_2$，一直递推下去可知 $x_{n+1}\geqslant x_n$；若 $x_2\leqslant x_1$，则 $x_3=g(x_2)\leqslant g(x_1)=x_2$，一直递推下去可知 $x_{n+1}\leqslant x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 单调有界必收敛. □

1.6 杂题

题目 1.6.1. 求解下列问题：

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n},k\in\mathbf{R}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n},\alpha\in\mathbf{R}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$$

(4)$a_1=\beta>0,a_{n+1}=\sqrt{\beta+a_n}$，判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 是否存在，并给出理由和极限值 (如极限存在).

解: (1)$k\leqslant 0$ 易证，当 $k>0$ 时，

法一：事实上，由泰勒展开，取 $m=\lfloor k\rfloor+2$ 易得 $e^n>\frac{n^m}{m!}$，那么：

$$0<\frac{n^k}{e^n}\leqslant\frac{m!}{n^{m-k}}<\frac{M}{n}\to 0(n\to\infty) \tag{1.6.1}$$

法二：我们还能使用洛必达法则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n/k}}\right)^k=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k}{e^{n/k}}\right)^k=0 \tag{1.6.2}$$

综上，我们知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=0$.

(2) 由 $n\alpha-1\leqslant\lfloor n\alpha\rfloor\leqslant n\alpha$，可知：

$$\alpha-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}\leqslant\alpha \tag{1.6.3}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}=\alpha$.

(3) 使用 Stolz 定理即可.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \tag{1.6.4}$$

(4) 取 $a=\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}>1$，且满足 $a^2=a+\beta$，则：

$$|a_{n+1}-a|=\left|\sqrt{\beta+a_n}-a\right|=\left|\sqrt{\beta+a_n}-\sqrt{a+\beta}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{\beta+a_n}+\sqrt{a+\beta}} \tag{1.6.5}$$

记 $C=\sqrt{\beta+a_n}+\sqrt{a+\beta}$, 则 $C>\sqrt{a+\beta}>\sqrt{1+\beta}>1$，故 $|a_{n+1}-a|<\frac{1}{C}|a_n-a|$.

由压缩映射原理，知 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

1.7 压缩映射-进阶

推论 1.7.1： 二阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果满足

$$|a_n-a|\leqslant p|a_{n-1}-a|+q|a_{n-2}-a| \tag{1.7.1}$$

其中 $p,q>0\wedge p+q<1$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

证明. 假设

$$|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a|\leqslant k(|a_{n-1}-a|+\lambda|a_{n-2}-a|) \tag{1.7.2}$$

得到方程组:

$$\begin{cases}k\lambda=q\\ k-\lambda=p\end{cases} \tag{1.7.3}$$

随便取一对解即可，这里取 $k=\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2},\lambda=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$.

于是如此迭代，便得到:

$$\begin{aligned}|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a| &\leqslant k(|a_{n-1}-a|+\lambda|a_{n-2}-a|) && (1.7.4)\\ &\leqslant k^2(|a_{n-2}-a|+\lambda|a_{n-3}-a|) && (1.7.5)\\ &\leqslant\cdots && (1.7.6)\\ &\leqslant k^{n-1}(|a_1-a|+\lambda|a_0-a|) && (1.7.7)\end{aligned}$$

下面我们证明 $k<1$，也即

$$\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2}<1\Leftrightarrow\sqrt{p^2+4q}<2-p\Leftrightarrow p^2+4q<4-4p+p^2\Leftrightarrow p+q<1 \tag{1.7.8}$$

设于是令 $n \to \infty$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(|a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a|\right) = 0 \tag{1.7.9}$$

由于

$$0 \leqslant |a_n - a| \leqslant |a_n - a| + \lambda|a_{n-1} - a| \tag{1.7.10}$$

$$0 \leqslant |a_{n-1} - a| \leqslant \frac{1}{\lambda}|a_n - a| + |a_{n-1} - a| \tag{1.7.11}$$

因此我们可以知道 $\lim_{n\to\infty}|a_n - a| = 0$.

从上述推导过程中可以看到，其实也可以允许 p, q 小于 0 的，但是要增加条件. 即一方面求根公式时，根式下方的东西要大于等于 0，即 $p^2 + 4q \geqslant q0$，另一方面 $p < 2$，且 $q \neq 0$。 □

推论 1.7.2： 高阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果从某项开始，满足

$$|a_n - a| \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i|a_{n-i} - a| \tag{1.7.12}$$

其中 $\sum_{i=1}^{m} p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

使用连续函数的介值性解特征方程即可.

证明详见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/1961736760292796066.

题目 1.7.1. 设 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解： 归纳易知 $1 < x_n \leqslant 4$ 假设 $\{x_n\}$ 极限存在为 $x \geqslant 1$，则 $x = \sqrt{x} + \frac{x}{2}$，$x = 0$(舍去) 或 $x = 4$.

由于：

$$|x_{n+1} - x| = \left|\sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} - \sqrt{x} - \frac{x}{2}\right| \leqslant |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \tag{1.7.13}$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \tag{1.7.14}$$

$$< \frac{1}{3}|x_n - x| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \tag{1.7.15}$$

故 $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 2$.

1.8 关于不动点的再讨论

对于压缩映射-3 中定义的 $x_{n+1} = f(x_n)$. 如果我们能够得到 $f(x)$ 的单调性，那么我们能否得到数列 $\{x_n\}$ 的单调性呢？答案是肯定的！下面我们具体分析一下：

如果 $f'(x) \geqslant 0$，即 $f(x)$ 单调递增，那么假设 $x_2 \geqslant x_1$，则有 $x_3 = f(x_2) \geqslant f(x_1) = x_2$，以此类推，可得到 $x_{n+1} \geqslant x_n$；若 $x_2 \leqslant x_1$，则 $x_3 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = x_2$，以此类推，可得到 $x_{n+1} \leqslant x_n$. 即如果已经知道 $f(x)$ 单调递增，那么数列 $\{x_n\}$ 的单调性之与前两项 x_1 和 x_2 的大小有关了.

如果 $f'(x) \leqslant 0$，即 $f(x)$ 单调递减，那么假设 $x_2 \geqslant x_1$，则有 $x_3 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = x_2$，$x_4 = f(x_3) \geqslant f(x_2) = x_3$，以此类推，可知 $x_{2n} \geqslant x_{2n-1}$，$x_{2n+1} \leqslant x_{2n}$. 若 $x_2 \leqslant x_1$，则 $x_3 = f(x_2) \geqslant f(x_1) = x_2$，$x_4 = f(x_3) \leqslant f(x_2) = x_3$ 以此类推，可知 $x_{2n} \leqslant x_{2n-1}$，$x_{2n+1} \geqslant qx_{2n}$.

更进一步，如果我们知道了 x_1 和 x_3 之间的大小关系，假设 $x_1 \leqslant x_3$，那么 $x_4 = f(x_3) \leqslant f(x_1) = x_2$，$x_5 = f(x_4) \geqslant f(x_2) = x_3$，不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递减，$\{x_{2n+1}\}$ 单调递增. 若 $x_1 \geqslant qx_3$，那么 $x_4 = f(x_3) \geqslant qf(x_1) = x_2$，$x_5 = f(x_4) \leqslant f(x_2) = x_3$，不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递增，$\{x_{2n+1}\}$ 单调递减.

事实上，由于 $f(x)$ 单调递减，那么 $F(x) = f(f(x))$ 单调递增，那么 $F(x_n) = f(f(x_n)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$，使用刚才的结论可知数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的单调性和 x_1 与 x_3 的大小有关.

因此我们有以下推论：

推论 1.8.1

设 a 为 f 的不动点，f 在 $x = a$ 点连续，在 $U(a,r)$ 中严格单调递增，且在 $(a-r,a)$ 上有 $f(x) > x$，在 $(a,a+r)$ 上有 $f(x) < x$，证明：若 $a_{n+1} = f(a_n)$，且 $a_1 \in U^o(a,r)$，则 $\{a_n\}$ 严格单调，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

证明. 首先，$x = a$ 为 f 在 $U(a,r)$ 上的唯一不动点，设 $a_1 \in (a-r,a)$，则 $a_2 = f(a_1) < f(a) = a$，故 $a_1, a_2 \in (a-r,a)$，则 $a_2 = f(a_1) > a_1$，即 $a_1 < a_2 < a$. 以此类推可知 $a_n < a$，且 $\{a_n\}$ 单调递增并有上界，且极限为 a(因为唯一不动点).

同理，设 $a_1 \in (a,a+r)$，则 $a_2 = f(a_1) > f(a) = a$，故 $a_1, a_2 \in (a,a+r)$，则 $a_2 = f(a_1) < a_1$，即 $a < a_2 < a_1$. 以此类推可知 $a_n > a$，且 $\{a_n\}$ 单调递减并有下界，且极限为 a. □

题目 1.8.1. 设 $x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. 问：$b$ 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛？并求极限值.

解: 首先解 $x = \frac{1}{2}(x^2+1)$，得 $x = 1$，因此数列 $\{x_n\}$ 如果收敛，只能以 1 为极限. 令 $f = \frac{1}{2}(x^2+1)$，$f'(x) = x$，故 f 在 $x < 0$ 单调递减，在 $x \geqslant 0$ 单调递增. 在 $(0,1)$，有 $f(x) < 1$，在 $(1,+\infty)$，有 $f(x) > 1$.

又由于 $x_1 = b$ 和 $x_1 = -b$ 对极限没有影响，因此可以假定 $b \geqslant 0$，最后再对称区间即可，那么 $x_n \geqslant 0$.

当 $0 \leqslant b \leqslant 1$ 时，$1 \geqslant qx_2 = \frac{b^2+1}{2} \geqslant qb = x_1$，$1 \geqslant qx_3 = f(x_2) \geqslant qf(x_1) = x_2$，归纳可知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，故收敛，且以 1 为极限.

当 $b > 1$ 时，$x_n > 1$，但 $x_2 = \frac{b^2+1}{2} > b = x_1$，以此递推，仍能得到 $\{x_n\}$ 单调递增，但 $x_n > 1$，故 $\{x_n\}$ 不会以 1 为极限，那么 $\{x_n\}$ 发散.

因此 $-1 \leqslant b \leqslant 1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛，且极限值为 1，其余情况发散.

1.9 函数形式的 Stolz 定理

除了数列，其实函数也有 Stolz 定理，不过不经常使用. 因此放到最后供查阅和有能力的同学学习.

定理 1.9.1： Stolz 定理的函数形式

- $(\frac{*}{\infty})$ 若 $T>0$ 为常数，且满足：
  1. $g(x+T)>g(x)$, $\forall x\geqslant a$;
  2. $g(x)\to+\infty(x\to+\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.
- $(\frac{0}{0})$ 若 $T>0$ 为常数，且满足：
  1. $0<g(x+T)<g(x)$, $\forall x\geqslant a$;
  2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

由上述定理，我们可以推出 Cauchy 定理：

定理 1.9.2： Cauchy 定理

若 f 在 $(a,+\infty)$ 内有定义, 且内闭有界，则

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geqslant c>0)$，当右边极限存在时成立.

证明. 1. 取 $g(x)=x$，$T=1$，则满足：

- $g(x+1)>g(x)$, $\forall x\geqslant a$;
- $g(x)\to+\infty(x\to+\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

因此我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

2. 首先，$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}}$. 又由于 $f(x)>0$，且满足函数的 Stolz 定理，可得：

$$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x+1))-\ln(f(x))}{x+1-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} \tag{1.9.1}$$

□

第 2 章　实数的完备性

直观上，实数完备性意味着实数轴上没有“间隙”（以理查德·戴德金的说法）。这是实数区别于有理数的特点，有理数在数轴上是有间隙的，即无理数。在十进制计数法下，实数的完备性等价于：实数与一个十进制小数表示一一对应。一般情况下我们认为实数的完备性主要有 8 个定理 (当然也有人说 10 个，参见https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870)，其中 6 个最为重要 (和书上一致)，下面我将叙述 8 个定理的版本，并将所有定理一一罗列出来：

2.1　实数完备性定理

定义 2.1.1： Dedekind 分割

将实数集 $\mathbf{R}$ 分为两个子集 S 和 T，且满足：

(1)$S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$;

(2)$\mathbf{R} = S \cup T$;

(3)$\forall x \in S, \forall y \in T$，总有 $x < y$，其中 S 称为左集，T 称为右集.

由上述定义得到的对实数集 $\mathbf{R}$ 的一个分割称为 **Dedekind 分割**，记作 (S, T).

定理 2.1.1： Dedekind 定理

实数集 $\mathbf{R}$ 的任一 Dedekind 分割 (S, T)，都唯一地确定一个实数 (称为中介数或中介点)，它或者是 S 的最大数 (此时 T 中无最小数)，或者是 T 的最小数 (此时 S 中无最大数).

定理 2.1.2： 确界原理

对于非空数集 S，如果它有上界，则必有上确界；如果它有下界，则必有下确界.

定理 2.1.3： 致密性定理

有界数列必有收敛子列.

定理 2.1.4： 单调有界定理

单调（从某项开始单调即可）且有界（递增只需有上界；递减只需有下界）的数列必收敛.

定理 2.1.5： Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

定理 2.1.6： 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

那么在 $\mathbf{R}$ 中唯一地存在一点 ξ，使得

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \tag{2.1.1}$$

定义 2.1.2： 聚点（极限点）- 1

设 S 为数轴的点集，ξ 为某一确定的点. 如果 ξ 的任何邻域都含有 S 的无穷多个点，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2.1.3： 聚点（极限点）- 2

对于点集 S，若点 ξ 的任何 ε 邻域都含有 S 中异于 ξ 的点，即 $U^o(\xi, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2.1.4： 聚点（极限点）- 3

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$，则其极限 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

定理 2.1.7： Weierstrass 聚点定理

$\mathbf{R}^n$ 中任何有界无穷点集至少有一个聚点.

定义 2.1.5： 开覆盖

对于一个数集 S，以及由一些互不相等（可有非空交集）的开区间（不为无穷区间）组成的点集

$$H = \bigcup_{k=1}^{n} S_i \tag{2.1.2}$$

若满足 $S \subset H$，则称 H 为 S 的一个开覆盖. 当 n 为有限数时，称为有限开覆盖，$n = \infty$ 时称为无限开覆盖.

定理 2.1.8： Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖。

一般情况下，证明有限覆盖定理需要使用反证法，而从有限覆盖定理证明其它定理则需要根据一些性质构造开覆盖. 而使用闭区间套定理证明某些性质时，往往采用二分法分割区间.

2.2 例题

题目 2.2.1. 证明对任意实数 α，均存在一个有理数列 a_n，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

证明. 取 $a_n = \dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$ 即可. □

题目 2.2.2. 证明有理数集 $\mathbb{Q}$ 是不完备的.

证明. 同上题,如果我们取 $\alpha = \pi$,虽然 a_n 趋向于 π,但在 $\mathbb{Q}$ 里找不到一个数 p,使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = p$. □

由于实数完备性等价定理较多，难度较大，因此不可能把所有的用法和证明详细写出来. 下面，我仅列举一些重要的题目，以示实数完备性定理的应用：

题目 2.2.3. 用闭区间套定理证明零点定理.

[分析]: 零点定理，指的是连续函数 $f(x)$ 如果在闭区间 $[a,b]$ 的端点处取值异号，那么 f 在区间内至少含有一个零点. 因此，我们想办法找到某一点，使得 $f^2(\xi) \leqslant 0$，那么就能得到 $f(\xi) = 0$.

证明. 设 $f \in C[a,b], f(a)f(b) < 0$，那么我们取 $a_1 = a, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$，为第一个闭区间. 取 $c_1 = \frac{a_1+b_2}{2}$，若 $f(c_1) = 0$，则已经得证，否则可以在 $f(a)f(c_1)$ 和 $f(c_1)f(b)$ 中找到一个小于 0 的表达式，不妨设 $f(a)f(c_1) < 0$，取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, I_1 = [a_2, b_2]$，依次类推. 如果找不到一个 $f(c_i) = 0$，那么我们可以得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$;

(3)$f(a_n)f(b_n) < 0$.

那么由闭区间套定理知，唯一存在一个点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$.

于是

$$f^2(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0 \tag{2.2.1}$$

□

也即 $f(\xi) = 0$.

题目 2.2.4. 用闭区间套定理证明聚点定理.

证明. 由于 S 为有界点集，那么存在 $M > 0$，使得 $S \subset [-M, M]$. 记 $a_1 = -M, b_1 = M$. 仿照上题取 $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个含有 S 中无穷个点，可记为 $[a_2, b_2]$. 同理，一直这样取下去，我们可以得到一列闭区间 $[a_n, b_n]$，满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2M}{2^{n-1}}=0$;

这是一个闭区间套，由闭区间套定理，知存在一点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由极限的定义，知存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$. 由定义知 ξ 为 S 的一个聚点. □

题目 2.2.5. 用闭区间套定理证明有限覆盖定理.

解: 反证法：假设不能用 H 的有限项覆盖 $[a,b]$. 即 $a_1=a,b_1=b$，同理取 $c_i=\frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1,c]$ 和 $[c,b_1]$ 中至少有一个不能用 H 的有限项覆盖 $[a,b]$，可记为 $[a_2,b_2]$. 同理，一直这样取下去，我们可以得到一列闭区间 $[a_n,b_n]$，满足：

(1)$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$;

这是一个闭区间套，由闭区间套定理，知存在一点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由于 H 是一个开覆盖，那么必存在一个区间 $(\alpha,\beta)\in H$，使得 $\xi\in(\alpha,\beta)$. 由极限的定义，知存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$. 这与 $[a_n,b_n]$ 的选取矛盾！故原命题成立.

题目 2.2.6. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

证明. 设 $f(x)\in C[a,b]$. 首先，对于闭区间上的一点 $x_0\in[a,b]$，我们有 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_{x_0})$ 是有界的（根据极限的定义可知），记界为 M_{x_0}. 当 $x\in U(x_0,\delta_{x_0})\cap[a,b]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M_{x_0}$. 令

$$H=\{U(x_0,\delta_{x_0})||f(x)|\leqslant M_{x_0}\ ,\ x\in U(x_0,\delta_{x_0})\cap[a,b]\} \tag{2.2.2}$$

那么 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故存在一个有限子覆盖

$$H'=\{U(x_i,\delta_{x_i})|U(x_i,\delta_{x_i})\in H,i=1,2,\cdots,n\} \tag{2.2.3}$$

取 $M=\max\{M_{x_1},M_{x_2},\cdots,M_{x_n}\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$. □

题目 2.2.7. 用致密性定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

[分析]: 致密性定理，指的是任何有界的数列必有收敛的子列. 如果采用正面直接证明法，我们不知道收敛数列的极限值，因此可能会遇到一些困难，故我们采用反证法.

证明. 反证法. 设 $f(x)\in C[a,b]$，但对任意 $M>0$，存在 $\{x_n\}\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|>M$.

取其收敛子列 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，则 $f(x_{n_k})\to f(x_0)(k\to\infty)$.[1]

那么由连续函数的局部有界性，知 $f(x_{n_k})$ 有界（否则不会收敛到 $f(x_0)$）. 但这与 $|f(x_{n_k})|>M$ 矛盾！故原命题得证. □

[1] 由于 f 的连续性

第 3 章　上下极限

上下极限的用处非常大，只要数列有界，那么就有上下极限，因此可以通过上下极限求极限.

3.1　定义

上下极限的定义依附于聚点的定义，因此我们先介绍一下数列的聚点的定义：

定义 3.1.1：　数列的聚点

若数 a 的任一邻域含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

注: 这里无限多项指的是数列的项，而不是数字. 也就是说，如果 $x_n = 1$，那么 1 就是数列的聚点.

从聚点的定义可以看出，如果一个数列 $\{x_n\}$ 有极限 a，那么该极限一定是数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

那我们自然会问，如果数列极限不存在呢？比如非正常极限 ∞（无界），或者是有界的数列 $(-1)^n$ 等，我们又该如何处理呢？

我们首先讨论有界的数列. 依聚点的定义，我们知 $(-1)^n$ 有两个聚点 -1 和 1，$\sin\frac{n\pi}{4}$ 有五个聚点 $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$. 由于这些数列都是有界的，因此我们猜测有界的数列必有聚点，即使极限不存在. 事实也的确如此：

定理 3.1.1：　有界数列聚点存在和最值性

对于有界数列 $\{x_n\}$ 至少含有一个聚点，且存在最大聚点和最小聚点.

证明. 因数列有无穷多项，因此可以使用闭区间套定理，每次二分区间，选择含有无穷多项的区间 $[a_k, b_k]$，可得到一个闭区间套，故可知聚点存在.

下面证明最值性，对于最大聚点，只需在选择区间时，优先选择右侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取左边的区间，由此得到的为最大聚点. 若不然，还存在更大的聚点 $\xi' > \xi$，则取 $\delta = \frac{1}{3}(\xi' - \xi) > 0$，则在 $U(\xi', \delta)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项.[1]，但 n 充分大时，$U(\xi', \delta)$ 全部落在 $[a_n, b_n]$ 右侧，这与优先选取右侧区间步骤相矛盾，故 ξ 为最大区间.

对于最小聚点也同理，优先选择左侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取右边的区间，由此得到的为最小聚点. □

对于最大聚点和最小聚点，我们分别称为上极限和下极限.

[1] 依聚点的定义可知.

定义 3.1.2： 上下极限

有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点 L 和最小聚点 l 分别称为上极限和下极限，并记作

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad , \quad l = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \tag{3.1.1}$$

因此有界数列一定有上下极限. 下面我们介绍一下上下极限的几个重要的定理，以便后续使用.

定理 3.1.2： 上下极限不等式

对于有界数列 $\{x_n\}$，我们有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \tag{3.1.2}$$

证明. 依上下极限的选取可知该定理成立. □

定理 3.1.3： 数列收敛的充要条件

有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \tag{3.1.3}$$

证明. $(\Rightarrow)$ 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\{x_n\}$ 只有一个聚点 A[2]，故 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

$(\Leftarrow)$ 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = A$，由上下极限的选取，可知仅能选取一个聚点 A，但又由聚点的定义和数列收敛的定义，知 A 即为 $\{x_n\}$ 的极限值. □

定理 3.1.4： 上下极限的保不等式

设有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$，且从某项起，有 $a_n \leqslant b_n$，则：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \quad , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \tag{3.1.4}$$

又若存在 $\alpha \leqslant \beta$，且从某项起，有 $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$，则：

$$\alpha \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \beta \tag{3.1.5}$$

注: 不要认为也满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$. 我们可以构造一个反例，令

$$a_n = \begin{cases} 1 & , n\text{为奇数} \\ 0 & , n\text{为偶数} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} 2 & , n\text{为奇数} \\ 0.5 & , n\text{为偶数} \end{cases} \tag{3.1.6}$$

[2] 数列收敛的等价定义

虽然 $a_n \leqslant b_n$，但 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$ ，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = 0.$

推论 3.1.1

对于有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$，我们有：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \tag{3.1.7}$$

现在我们处理无界数列的情况. 我们发现，如果将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点，那么它也满足聚点的定义. 即 $+\infty, -\infty$ 可能是无界数列的聚点. 对于这样形成的上下极限，我们称之为非正常上下极限，记法和一般的上下极限类似.

定义 3.1.3： 非正常上下极限

假设 $+\infty$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限，$-\infty$ 为数列 b_n 的下极限，那么：

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty \quad , \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n = -\infty \tag{3.1.8}$$

在一般的讨论中，我们一般只讨论正常的上下极限，如非特别说明，下面考虑的上下极限均为有界数列的（正常）上下极限.

除此之外，上下极限还有另外一种定义：

定义 3.1.4： 上下极限确界定义

设 $\{x_n\}$ 为有界实数列，则有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} = \inf_n \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} \quad , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} = \sup_n \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} \tag{3.1.9}$$

注: 使用上确界数列不增（递减），下确界不减（递增）的性质可证上述等式成立.

注: 由上式可以看出，数列 $\{x_n\}$ 的上极限，就是 $\{x_k\}, k \geqslant n$ 的上确界的极限（上确界的下确界）；数列 $\{x_n\}$ 的下极限，就是 $\{x_k\}, k \geqslant n$ 的下确界的极限（下确界的上确界）.

3.2 Stolz 定理下极限形式

除了极限形式的 Stolz 定理，也存在上下极限形式的 Stolz 定理.

定理 3.2.1：　上下极限形式的 Stolz 定理

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$. 若 $\{y_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$，则有：

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\tag{3.2.1}$$

证明. 只需证明第一个不等式和第三个不等式即可. 下面仅证第三个不等式：

设 $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=M$，则存在 $N,\varepsilon=\varepsilon(n)\to 0(n\to\infty)$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant M+\varepsilon\Leftrightarrow x_{n+1}-x_n\leqslant(y_{n+1}-y_n)(M+\varepsilon)\ (\text{注意}y_n\text{严格单调})\tag{3.2.2}$$

那么

$$\sum_{k=N}^{n}(x_{n+1}-x_n)\leqslant\sum_{k=N}^{n}(y_{n+1}-y_n)(M+\varepsilon)\Leftrightarrow x_{n+1}-x_N\leqslant(y_{n+1}-y_N)(M+\varepsilon)\tag{3.2.3}$$

因此

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\left(1-\frac{y_N}{y_{n+1}}\right)(M+\varepsilon)+\frac{y_N}{y_{n+1}}\leqslant M+k\varepsilon\tag{3.2.4}$$

两边同时取上极限，且由 ε 的任意性，得 $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant M=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. □

注: 也可以这样理解，如取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(M+\frac{k}{n}\right)=M=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\tag{3.2.5}$$

3.3　上下极限的一些例题

上下极限虽然方便和实用，但是很容易出错，首先由前面几个定理和推论可以看出，整体的上（下）极限，并不等于分开的式子取上（下）极限之后再求和. 另外，我们再给出几个等式，并在下面给出一些上下极限的例题.

推论 3.3.1： 上下极限等式

设 $\{x_n\}$ 为有界数列，则

- 加负号反转上下极限: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)$ ， $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)$;
- 若 $\{y_n\}$ 收敛，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
- 当 $x_n \geqslant 0$ 时，有 $\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n^2$;
- 若 $f(x)$ 严格单调递增且 $f(x_n) > 0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) > 0$ 恒成立，那么

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)}\ ,\ \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)} \tag{3.3.1}$$

一个特殊的例子就是取 $f(x)=x, x_n>0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$，我们得到：

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}\ ,\ \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n} \tag{3.3.2}$$

- 若 $f(x)$ 严格单调递增且连续，那么

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\right)\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to\infty} x_n\right) \tag{3.3.3}$$

特别地，若 $f(x)\in C(a,b]$ 但在左端点不一点连续，$x_n\in(a,b]$，若满足 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n > a$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\right) \tag{3.3.4}$$

若满足 $\varliminf_{n\to\infty} x_n > a$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\right)\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to\infty} x_n\right) \tag{3.3.5}$$

- 若 $f(x)$ 严格单调递减且连续，那么

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to\infty} x_n\right)\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\right) \tag{3.3.6}$$

特别地，若 $f(x)\in C(a,b]$ 但在左端点不一点连续，$x_n\in(a,b]$，以及 $\varliminf_{n\to\infty} x_n > a$，那么我们仍有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to\infty} x_n\right)\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n\right) \tag{3.3.7}$$

注: 设 $\{x_n\}$ 为区间 I 上的有界数列，函数 f 在 I 上连续. 对于一般的极限，只要函数连续，即可和

极限交换顺序. 但对于上下极限，即使函数连续，上下极限也不能随便和函数交换顺序，即

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)\ ,\ \ \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(\varliminf_{n\to\infty} x_n) \tag{3.3.8}$$

当函数严格单调连续且有界（闭区间连续则显然有界）时可以交换顺序. 单调递增符号不变，单调递减上下极限符号反转.

题目 3.3.1. $x_n > 0, y_n > 0$ 且均有上界，试证明：

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.9}$$

当 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 的极限存在时取等.

[分析]: 直接证明两项相乘的式子似乎不太好证明，我们可以尝试将乘法变为加法，然后使用我们已知的加法的结论去证明. 本题主要考虑使用对数函数，将乘法变为加法再进行证明.

证明. 1^o 当某个数列上极限为 0 时，不妨设 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 0$，由于 $0 \leqslant l_x \leqslant L_x = 0$，故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. 又 $0 < x_n y_n < M \cdot x_n$ $(M > 0)$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0 = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.10}$$

2^o 当两个数列上极限均不为 0 时，那么我们有：

$$\ln\left(\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)\right) = \varlimsup_{n\to\infty} \ln(x_n y_n) = \varlimsup_{n\to\infty}(\ln x_n + \ln y_n) \tag{3.3.11}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \ln x_n + \varlimsup_{n\to\infty} \ln y_n = \ln \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \ln \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.12}$$

$$= \ln\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\right) \tag{3.3.13}$$

这说明

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.14}$$

当且仅当 $\ln x_n$ 或 $\ln y_n$ 极限存在时取等，也即 x_n 或 y_n 极限存在且大于 0.

证毕. □

题目 3.3.2. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解: 首先，易见 $1 \leqslant x_n \leqslant 2$ $(n \geqslant 3)$. 设 L, l 分别为 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限，则

$$L = 1 + \frac{1}{l} \quad , \quad l = 1 + \frac{1}{L} \tag{3.3.15}$$

可知 $L = l$，则 $\{x_n\}$ 收敛，设收敛到 x，则 $x = 1 + \frac{1}{x}$，得 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

题目 3.3.3. 有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$，求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

解: 首先 $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_{2n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ， $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_{2n} \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

设 $|a_n|$ 的上下极限分别为 L,l，那么：

$$
\begin{aligned}
0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|2a_n+a_{2n}| &\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|2a_n|-|a_{2n}|) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|2a_n|+\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-|a_{2n}|) && (3.3.16)\\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|2a_n|-\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_{2n}|) && (3.3.17)\\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|+\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|-\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_{2n}|)\right) && (3.3.18)\\
&\geqslant L && (3.3.19)
\end{aligned}
$$

但 $L\geqslant 0$，因此只能 $L=l=0$，故 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

题目 3.3.4. 设 $x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right),x_1=x_0^2,x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\frac{x_{n-1}}{2}$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1<x_n\leqslant 4$. 那么：

$$
L\leqslant\sqrt{L}+\frac{L}{2}\ ,\ l\geqslant\sqrt{l}+\frac{l}{2} \tag{3.3.20}
$$

则 $L=l=4$，故 $\lim_{n\to\infty} x_n=4$.

我们之前提到过：

> 对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果从某项开始，满足
>
> $$|a_n-a|\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i|a_{n-i}-a| \tag{3.3.21}$$
>
> 其中 $\sum_{i=1}^{m}p_i<1,p_i>0$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.

[分析]: 我们考虑 $|a_n-a|$ 这个数列，如果想要使用上下极限证明，那么一定要先证明该数列有界，然后注意上下极限的不等式，进而推得结论.

我们现在使用上下极限证明一下：

证明. 首先，我们假设从 $n>N$ 开始，满足

$$
|a_n-a|\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i|a_{n-i}-a|
$$

取 $M=\max\{|a_1-a|,|a_2-a|,\cdots,|a_N-a|\}$，那么 $|a_i-a|\leqslant M(i=1,2\cdots,N)$.

使用第二数学归纳法，假设 $|a_k - a| \leqslant M$，那么

$$|a_{k+1} - a| \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i |a_{k-i} - a| \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i M < M \tag{3.3.22}$$

故有 $|a_n - a|$ 有界. 设其上下极限分别为 L, l，则：

$$L \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i L \Leftrightarrow \left(1 - \sum_{i=1}^{m} p_i\right) L \leqslant 0 \tag{3.3.23}$$

因此 $L = 0, 0 \leqslant l \leqslant L = 0$，故 $L = l = 0$，因此有 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

题目 3.3.5. 设 $a_1 = a > 0, a_2 = b > 0, a_{n+2} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} (n = 1, 2, \cdots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 易证 $2 \leqslant a_n \leqslant \frac{5}{2} (n \geq 3)$. 设 $x = 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$，即 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 = 0$，限制 $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$.

又 $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4) > 0$,故单调,且 $f(2) f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$,即存在唯一 $x_0 \in \left(2, \frac{5}{2}\right), s.t. f(x_0) = 0$，即 $x_0 = 2 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}$.

那么

$$|a_{n+2} - x_0| = \left|2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} - 2 - \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| \tag{3.3.24}$$

$$\leqslant \left|\frac{(a_{n+1} - x_0)(a_{n+1} + x_0)}{x_0^2 a_{n+1}^2}\right| + \left|\frac{(a_n - x_0)(a_n + x_0)}{x_0^2 a_n^2}\right| \tag{3.3.25}$$

$$\leqslant \frac{5}{16} |a_{n+1} - x_0| + \frac{5}{16} |a_n - x_0| \tag{3.3.26}$$

设 L, l 分别为 $b_n = |a_n - x_0|$ 的上下极限，则

$$0 \leqslant l \leqslant L \leqslant \frac{5}{16} L + \frac{5}{16} L = \frac{5}{8} L \tag{3.3.27}$$

故 $L = l = 0$，因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. □

题目 3.3.6. 设 $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$，对于 $n \geqslant 0$，定义：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \end{cases}$$

证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

[分析]: 第一问我们考虑压缩映射. 因为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 结构相似，我们猜测 $x_n - y_n$ 的极限为 0. 对于第二问，我提供了多种不同方向的思路，主要工具就是上下极限.

证明. (1)

首先，$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$. 那么 $x_n, y_n \in [0,1]$ $(\forall n \geqslant 1)$. 当 $n \geqslant 1$ 时，有：

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-y_{n+1}| &= \left|\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}-\frac{1}{2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1}\right| && (3.3.28)\\
&= \left|\frac{x_n^2-y_n^2}{(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}\right| && (3.3.29)\\
&\leqslant \frac{x_n+y_n}{(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}|x_n-y_n| && (3.3.30)\\
&\leqslant \frac{x_n+y_n}{1+3x_n^2+2x_ny_n+3y_n^2}|x_n-y_n| && (3.3.31)\\
&\leqslant \frac{x_n+y_n}{1+2x_n^2+4x_ny_n+2y_n^2}|x_n-y_n| && (3.3.32)\\
&\leqslant \frac{1}{2}|x_n-y_n| && (3.3.33)\\
& && (3.3.34)
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

(2) 设 L, l 分别为数列 $\{x_n\}$ 的上下极限，那么 $0 \leqslant l \leqslant L \leqslant 1$. 由于 $y_n=(y_n-x_n)+x_n$，故

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n = 0+L=L\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} y_n=0+l=l \tag{3.3.35}$$

下面给出两种方法证明 $\{x_n\}$ 极限存在.

法一（原创）：我们直接对第一个递推关系式取上下极限，会得到如下结果：

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)} \leqslant \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n^2+\varliminf\limits_{n\to\infty} x_ny_n+2\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n^2+1} && (3.3.36)\\
&\leqslant \frac{1}{l^2+l\cdot l+2l^2+1}=\frac{1}{4l^2+1} && (3.3.37)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)} \geqslant \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n^2+\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_ny_n+2\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n^2+1} && (3.3.38)\\
&\geqslant \frac{1}{L^2+L\cdot L+2L^2+1}=\frac{1}{4L^2+1} && (3.3.39)
\end{aligned}$$

那么有：

$$\begin{aligned}
L \leqslant \frac{1}{4l^2+1} \leqslant \frac{1}{4\left(\frac{1}{4L^2+1}\right)^2+1} &\Leftrightarrow (4L^2+1)^2(L-1)+4L \leqslant 0 && (3.3.40)\\
l \geqslant \frac{1}{4L^2+1} \geqslant \frac{1}{4\left(\frac{1}{4l^2+1}\right)^2+1} &\Leftrightarrow (4l^2+1)^2(l-1)+4l \geqslant 0 && (3.3.41)
\end{aligned}$$

令 $f(x)=(4x^2+1)^2(x-1)+4x$. 下面通过三个分支继续求解：

分支一： 注意到

$$\begin{aligned}
(4L^2+1)^2(L-1)+4L &= (4L^2-1+2)^2(L-1)+4L \\
&= (4L^2-1)^2(L-1)+4(4L^2-1)(L-1)+4\,(2L-1) \\
&= (2L-1)\left[(2L-1)(2L+1)^2(L-1)+4(2L+1)(L-1)+4\right] \\
&= (2L-1)\left[(2L-1)(2L+1)^2(L-1)+4L(2L-1)\right] \\
&= (2L-1)^2\left[(2L+1)^2(L-1)+4L\right] \\
&= (2L-1)^2\left[(2L-1+2)^2(L-1)+4L\right] \\
&= (2L-1)^2\left[(2L-1)^2(L-1)+4(2L-1)(L-1)+4(2L-1)\right] \\
&= (2L-1)^3\left[(2L-1)(L-1)+4(L-1)+4\right] \\
&= (2L-1)^3(2L^2+L+1)
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

可知 $x=\frac{1}{2}$ 为 $g(x)=0$ 的唯一实根（三重根），且可看出，$f(x)$ 单调递增，故可得 $L\leq\frac{1}{2}$. 同理 $l\geqslant\frac{1}{2}$，那么只能 $L=l=\frac{1}{2}$，因此 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

分支二： 首先，注意到 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根，且

$$f'(x)=16x(x-1)(4x^2+1)+(4x^2+1)^2+4 \tag{3.3.43}$$

$$f''(x)=16(3x-1)(4x^2+1)+128x^2(x-1) \tag{3.3.44}$$

$$f'''(x)=960x^2-384x+48 \tag{3.3.45}$$

注意到 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f''\left(\frac{1}{2}\right)=0,f'''\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0.$

故 $f(x)=(x-1)^3g(x)$，$g(x)$ 为二次多项式，且 $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$. 通过待定系数法或多项式除法，可得 $g(x)=2x^2+x+1$. 剩余步骤和分支一一致.

分支三： 首先，注意到 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根，且

$$f'(x)=16x(x-1)(4x^2+1)+(4x^2+1)^2+4 \tag{3.3.46}$$

$$f''(x)=16(3x-1)(4x^2+1)+128x^2(x-1) \tag{3.3.47}$$

$$f'''(x)=960x^2-384x+48 \tag{3.3.48}$$

注意到 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$. $\Delta=384^2-4\cdot 960\cdot 48=-36864<0$，因此 $f'''(x)>0$ 恒成立，也即 $f''(x)$ 单调递增. 由于 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$，因此在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，$f''(x)<0$，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增，又由于 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，故 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立. 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，那么

$$f(L)\leqslant 0=f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow L\leqslant\frac{1}{2} \tag{3.3.49}$$

$$f(l)\geqslant 0=f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow l\geqslant\frac{1}{2} \tag{3.3.50}$$

因此 $L=l=\frac{1}{2}$，故 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

分支四：已知等价为：

$$L(4l^2+1) \leqslant 1\ ,\ l(4L^2+1) \geqslant 1 \tag{3.3.51}$$

故

$$L(4l^2+1) \leq l(4L^2+1) \Leftrightarrow (4Ll-1)(L-l) \geq 0 \tag{3.3.52}$$

若 $L \neq l$，则 $4Ll \geqslant 1$，以及 $1 \geqslant L(4l^2+1) = 4Ll \cdot l + L \geqslant L + l$.

因此

$$(L+l)^2 = L^2 + 2Ll + l^2 \leqslant 1 \leqslant 4Ll \Rightarrow (L-l)^2 \leqslant 0 \tag{3.3.53}$$

只能 $L = l$. 最后再考虑 $g(x) = 4x^3 + x - 1, g(l) = g(L) = 0$[3]，易知其单调递增，且 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，则 $L = l = \frac{1}{2}$. 即 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

法二（官方答案）：首先，我们有：

$$(x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 3x_n^2 - x_ny_n - 2y_n^2 = 4x_n^2 - (x_n^2 + x_ny_n + 2y_n^2) \tag{3.3.54}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} [4x_n^2 - (x_n^2 + x_ny_n + 2y_n^2)] = \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 0 \tag{3.3.55}$$

又由于

$$2x_n^2 + x_ny_n + y_n^2 + 1 = (x_n^2 + x_ny_n + 2y_n^2) - (y_n^2 - x_n^2) \tag{3.3.56}$$

故

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n^2 + x_ny_n + 2y_n^2) = 4L^2\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} (x_n^2 + x_ny_n + 2y_n^2) = 4l^2 \tag{3.3.57}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (2x_n^2 + x_ny_n + y_n^2) = 4L^2\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} (2x_n^2 + x_ny_n + y_n^2) = 4l^2 \tag{3.3.58}$$

那么

$$L = \frac{1}{4l^2+1}\ ,\ l = \frac{1}{4L^2+1} \tag{3.3.59}$$

也即 $4L^2 + 1 = \frac{1}{l}, 4l^2 + 1 = \frac{1}{L}$，故

$$l(4L^2+1) = L(4l^2+1) = 1 \tag{3.3.60}$$

若 $L \neq l$，则 $4Ll = 1, L + l = 1$，解得 $L = l = \frac{1}{2}$ 矛盾，因此 $L = l = \frac{1}{2}$，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$. □

[3] 把 $L = l$ 代入上述 (3.3.51) 可得.

注: 方法一不能取等，是因为没有证明

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2)=4L^2\ ,\ \varliminf_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2)=4l^2$$
$$\varlimsup_{n\to\infty}(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2)=4L^2\ ,\ \varliminf_{n\to\infty}(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2)=4l^2$$

因此只能得到关于上下极限的不等式.

另外，上下极限也有一些无法做的题目，比如定义的数列形如 $x_{n+1}=x_n+o(1)$，其中 $\lim_{n\to\infty}o(1)=0$，对其取上下极限只能得到恒等式，对做题没帮助.

题目 3.3.7. 定义 $x_1=0,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n^2}$，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

解: 事实上，我们有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3.3.61}$$

有时候，虽然上下极限不能直接证明结论得到结果，但却能在中间起辅助作用.

题目 3.3.8. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0\leqslant x_{n+2}\leqslant\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$，求证 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

解: 易得

$$y_{n+1}=2x_{n+2}+x_{n+1}\leqslant 2x_{n+1}+x_n=y_n \tag{3.3.62}$$

由数学归纳法，知 $0\leqslant x_n\leqslant M(M$ 为一固定的常数). 故 $\{y_n\}$ 单调递减且有界，则收敛，设极限值为 y_0. 设 $\{a_n\}$ 的上、下极限分别为 L,l，又由于 $x_n=y_n-2x_{n+1}$，则：

$$L=\varlimsup_{n\to\infty}(y_n-2x_{n+1})=y_0-2l\ ,\ l=\varliminf_{n\to\infty}(y_n-2x_{n+1})=y_0-2L \tag{3.3.63}$$

解得 $L=l=\frac{y_0}{3}$. 故 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注: 如果我们直接对 y_n 取上、下极限，则只能得到 $y_0=\varlimsup_{n\to\infty}(2x_{n+2}+x_{n+1})\leqslant 2L+L=3L$, $y_0=\varliminf_{n\to\infty}(2x_{n+2}+x_{n+1})\geqslant 2l+l=3l$.

从表面看起来，上下极限比极限要求更弱，因此能通过普通极限去做的题目，一定能使用上下极限做. 反之，由于收敛的充要条件（上下极限相等），虽然能做出来，但可能会比较困难. 上下极限和普通的极限有很大区别，因此有时候的结论可能并不显然，甚至是错误的，因此读者需要严格遵守定理、推论中的公式进行计算，而不是通过自己“臆想”公式去计算.

当然，我们鼓励读者对定理、推论等进行推广证明，尝试发现新的公式.

第 4 章 数项级数

从本章开始，我们将逐步介绍一个新的知识——级数. 事实上，级数的定义并不复杂，你甚至可以认为它是数列部分和的一个推广. 不过在本章，我们讨论更多的内容，包括级数的敛散性判别法，级数和以及部分拓展内容.

4.1 级数的定义

我们给出级数的定义：

定义 4.1.1： 数项级数

设 $a_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 为数列，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4.1.1}$$

称为级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 或 $\sum a_n$.

同数列类似，级数也有收敛和发散一说，即若 (4.1.1) 收敛到一个确定的常数，则称级数 $\sum a_n$ 收敛，否则称级数 $\sum a_n$ 发散.

级数的性质可以用其部分和描述，记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$ 为级数 $\sum a_n$ 的部分和数列.

定理 4.1.1： 级数敛散性等价刻画

数列 $\{S_n\}$ 的敛散性和级数 $\sum a_n$ 的敛散性一致，即

$$\text{数列}S_n\text{收敛}\Leftrightarrow\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}\ ,\ \text{数列}S_n\text{发散}\Leftrightarrow\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散} \tag{4.1.2}$$

因此我们可以使用我们之前的一些方法来判断级数 $\sum a_n$ 的敛散性，下面我们推导级数的 Cauchy 收敛准则，来判断级数的敛散性.

定理 4.1.2： 级数收敛的 Cauchy 准则

级数 $\sum a_n$ 收敛的充要条件为：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$，对一切 $p\in N$，有：

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon \tag{4.1.3}$$

证明. 由于数列 $\{S_n\}$ 收敛的充要条件为：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$，对一切 $p\in N$，有：

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon \tag{4.1.4}$$

也即

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

□

题目 4.1.1. 证明**调和级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证明. 我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明，即 $\exists\varepsilon=\frac{1}{2}$, 对 $\forall N>0$，即使 $n>N$，仍 $\exists p=n$，使得

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}=\varepsilon \tag{4.1.5}$$

故调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散（趋于无穷大）. □

对于收敛的级数，我们有以下性质：

定理 4.1.3： 级数收敛的必要条件

级数 $\sum a_n$ 收敛的必要条件是通项趋于 0，即若 $\sum a_n$ 收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{4.1.6}$$

证明. 设 $\sum a_n$ 收敛，其部分和数列 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 也收敛. 故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0 \tag{4.1.7}$$

□

注: 上述定理的逆否命题成立，也即如果 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$ 或极限不存在，则级数 $\sum a_n$ 发散.

题目 4.1.2. 证明下述级数发散：

(1) $\sum(-1)^n$;

(2) $\sum\frac{2^n}{n}$;

(3) $\sum(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$.

证明. (1) 通项 $(-1)^n$ 极限不存在，故原级数发散；

(2)$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=+\infty$，故发散；

(3)$\sqrt{n}-1\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor\leqslant\sqrt{n}$，故 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 极限也不存在. □

题目 4.1.3. 证明等比级数 $\sum q^n$，在 $|q|<1$ 时收敛，在 $|q|\geqslant1$ 时发散.

证明. 1^o. 当 $|q|<1, q\neq 0$ 时，易见

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}(n\to\infty) \tag{4.1.8}$$

2^o. 当 $q=0$ 时显然收敛；

3^o. 当 $q=1, q=-1$ 时，原级数发散；

4^o. 当 $|q|>1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \infty(n\to\infty) \tag{4.1.9}$$

发散.

综上，等比级数 $\sum q^n$，在 $|q|<1$ 时收敛，在 $|q|\geqslant 1$ 时发散. □

定理 4.1.4： 级数的若干性质

级数有如下重要的性质：

1. 若 $\sum u_n, \sum v_n$ 收敛，则 $\sum(cu_n+dv_n)$ 也收敛，且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$;
2. 去掉、增加。改变级数的**有限项**，不改变级数的敛散性;
3. 在收敛的级数中任意加括号，不改变级数的**收敛性**和它的和.

注: 1. 两个发散级数进行运算，所得到的级数不一定发散. 例如，取 $c=-d, u_n=v_n=\frac{1}{n}$;

2. 和数列极限类似，但要注意是有限项;

3. 如果是发散级数，则加括号后得到的级数可能收敛也可能发散，但因为对收敛的级数加括号不改变收敛性. 因此如果加完括号后的级数发散，则原级数发散；如果加完括号后的级数收敛，则原级数可能收敛也可能发散.

例如，级数 $\sum(-1)^n$ 发散，但级数 $\sum[(-1)+(1)]=0$ 收敛.

题目 4.1.4. 证明级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$ 发散.

证明. 将奇数项和偶数项加括号，得到新级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots \tag{4.1.10}$$

通项 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$，故原级数发散. □

4.2 正项级数敛散性判别法

定义 4.2.1： 正项级数

我们把通项 $a_n \geqslant 0$ 的级数称为正项级数.

由于通项大于等于 0，因此考虑和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则 S_n 单调递增，因此如果它有上界，则一定有极限，也即级数 $\sum a_n$ 收敛；如果无界，那么原级数就发散.

引理 4.2.1： 正项级数收敛的充要条件

正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 S_n 有界.

证明. 即存在 $M > 0$，使得 $|S_n| < M$. 由于 S_n 单调递增有上界，故收敛，也即原级数收敛；而如果 S_n 无界，则 $S_n \to \infty (n \to \infty)$，故原级数发散. □

比较原则

定理 4.2.1： 比较原则

如果正项级数 $\sum u_n, \sum v_n$，从某项开始有 $u_n \leqslant v_n$，则

1. 若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 收敛；
2. 若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 发散.

证明. 设 $\sum u_n$ 的部分和数列为 S_n，$\sum v_n$ 的部分和数列为 T_n，则

1. 从 N 开始，有

$$S_n \leqslant T_n + R_N \tag{4.2.1}$$

其中 $R_N = |(T_1 + T_2 + \cdots + T_N) - (S_1 + S_2 + \cdots + S_N)|$ 是一个确定，有限的常数. 则 S_n 有界，故级数 $\sum u_n$ 收敛；

2. 由于 $S_n \to \infty$，则 $T_n \to \infty$，故级数 $\sum v_n$ 发散. □

题目 4.2.1. 证明 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$，在 $p \leqslant 1$ 时发散，在 $p > 1$ 时收敛.

证明. 1^o. $p \leqslant 1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$，而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，则 $\frac{1}{n^p}$ 发散；

2^o. $p > 1$ 时，令 $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$，则 $f'(x) = \frac{1-p}{x^p}$，由 Lagrange 中值定理，得

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1-p}{(n+\theta_n)^p} (0 < \theta_n < 1) \tag{4.2.2}$$

因此

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] \tag{4.2.3}$$

故

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \leqslant 1 + \frac{1}{p-1}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right] \tag{4.2.4}$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] \leqslant 1 + \frac{1}{(p-1)2^{p-1}} \tag{4.2.5}$$

有界，故收敛. □

注: p 级数，也称为黎曼 Zeta 函数，即

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{4.2.6}$$

当 $s = 2$ 时，就是著名的巴塞尔问题，我们有

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.2.7}$$

推论 4.2.1： 比较原则的极限形式

设 $\sum u_n, \sum v_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \tag{4.2.8}$$

则

1. 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum u_n, \sum v_n$ 同敛散;
2. 若 $l = 0$，则 $\sum v_n$ 收敛时,$\sum u_n$ 也收敛;
3. 若 $l = +\infty$，则 $\sum v_n$ 发散时,$\sum u_n$ 也发散.

只需按照定义，将 (4.2.8) 按照极限的定义展开估计即可，此处不再详细说明.

题目 4.2.2. 判断下列级数的敛散性:

1. $\sum \sin\frac{1}{n}$
2. $\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$
3. $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

解:

1. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1 \tag{4.2.9}$$

故 $\sum\sin\frac{1}{n}$ 发散;

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}}=\pi \tag{4.2.10}$$

故 $\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛;

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1 \tag{4.2.11}$$

故 $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

除了比较原则，我们还有比式判别法，根式判别法，积分判别法，拉贝判别法，我们下面一一讲解.

比式判别法比式判别法，又称达朗贝尔判别法（d'Alembert 判别法），比值判别法等. 它根据级数的通项的性质，来判断级数的敛散性.

定理 4.2.2： 比式判别法

设 $\sum u_n$ 为**正项级数**，且存在 $N>0$, 以及**确定的**常数 p，满足 $0<q<1$，则：

1. 若对任意的 $n>N$，都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q \tag{4.2.12}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛;

2. 若对任意的 $n>N$，都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1 \tag{4.2.13}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

证明. 1. 不妨设 (4.2.12) 对任意 $n\in N^*$ 成立[1]，那么

$$\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q^{n-1} \tag{4.2.14}$$

[1] 由于改变级数的有限项不影响敛散性，因此这里可以不妨设.

因此 $u_n \leqslant u_1 q^{n-1}$，而 $\sum u_1 q^{n-1}$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛.

2. $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \cdots \geqslant u_N$，因此 u_n 不趋于 0，故级数 $\sum u_n$ 发散.

□

注: 这里『确定的』常数 p，指的是它的取值和 n 无关. 如果 p 的取值和 n 有关，则可能得到错误的结果. 例如 $u_n = \frac{1}{n}$，则 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$，但此时 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

但是在实际问题中，我们经常使用下面更为方便的两个推论：

推论 4.2.2：比式判别法上下极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，则

1. 若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1 \tag{4.2.15}$$

则原级数收敛；

2. 若

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1 \tag{4.2.16}$$

则原级数发散.

特别地，如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 极限存在时，我们能马上得到下述推论：

推论 4.2.3：比式判别法极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \tag{4.2.17}$$

则

(i) $q < 1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii)$q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

注: 上述两个推论都没有讨论 $q = 1$ 的情况的，实际上当 $q = 1$ 时，级数的敛散性无法判断. 例如 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛，但却有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \tag{4.2.18}$$

题目 4.2.3. 判断级数 $\sum \frac{n}{2^n}$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \tag{4.2.19}$$

因此原级数收敛.

题目 4.2.4. 判断级数 $\sum \frac{(2n-1)!!}{n!}$ 的敛散性，其中 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1 \tag{4.2.20}$$

因此原级数发散.

题目 4.2.5. 证明：若 $a_n > 0$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \geqslant 0$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

证明. 1^o 当 $q > 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1}} \tag{4.2.21}$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)}{n}\right] = \exp\left[\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = q \tag{4.2.22}$$

2^o 当 $q = 0$ 时，此时

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1} \leqslant \frac{\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{a_1} + a_1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.2.23}$$

□

注： 证明思路和1.2类似.

注： exp 表示指数，即 $\exp(x) = e^x$.

一般情况下，当通项为比式时，我们一般使用比值判别法，这样后一项和前一项就能抵消一部分，以达到简化计算的目的.

通过上述题目，我们引出另一个正项级数的判别法——根式判别法. **根式判别法**首先介绍一下根式判别法的一般形式.

定理 4.2.3： 根式判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在 $N>0$ 及确定的常数 l，
(i) 若对任意 $n>N$，有

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant l<1 \tag{4.2.24}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛；
(ii) 若对任意 $n>N$，有

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1 \tag{4.2.25}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

同理，根式判别法也有上下极限和极限形式，分别阐述如下：

推论 4.2.4： 根式判别法上下极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l \tag{4.2.26}$$

则
(i)$l<1$ 时原级数收敛；
(ii)$l>1$ 时原级数发散.

特别地，如果 $\sqrt[n]{u_n}$ 极限存在时，我们能马上得到下述推论：

推论 4.2.5： 根式判别法极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l \tag{4.2.27}$$

则
(i)$l<1$ 时原级数收敛；
(ii)$l>1$ 时原级数发散.

注: 从比值判别法和根式判别法的关系，可以看出能使用比值判别法判断的级数，一定能使用根式判别法判断；但能使用根式判别法判断的级数，则不一定能使用比值判别法判断，说明根式判别法更有效.

题目 4.2.6. 判断级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 的敛散性.

解： 方法一：使用比值判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{10^n}}{\frac{n!}{10^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=+\infty \tag{4.2.28}$$

故级数 $\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

方法二：使用根式判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{10^n}}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)!} \tag{4.2.29}$$

下面我们讨论 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$ 由 Stirling 公式[2]，知 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$，于是

$$\sqrt[n]{n!}=\exp\left(\frac{\ln n!}{n}\right)\sim\exp\left[\frac{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}\right)}{n}\right]=\exp\left[\frac{\ln(2\pi n)}{2n}+\ln n-1\right]\sim\exp\left(\ln n-1\right)=\frac{n}{e} \tag{4.2.30}$$

注：上述不能直接对 Stirling 公式两边同时取 n 次方，因为 n 是取极限的自变量，直接取 n 次方可能会出错，所以需要通过指数化规避这个风险.

因此 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$. 故级数 $\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

方法三：由 Stirling 公式，知当 $n>20e$ 时，有

$$\frac{n!}{10^{n-1}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}}{10^{n-1}}>\frac{\frac{n^n}{e^n}}{10^n}=\left(\frac{n}{10e}\right)^n>2^n \tag{4.2.31}$$

但 $\sum 2^n$ 发散，因此级数 $\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

题目 4.2.7. 判断级数 $\sum\frac{n^2}{2^n}$ 的敛散性.

解： 事实上，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\frac{1}{2}<1 \tag{4.2.32}$$

故级数 $\sum\frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

积分判别法

由 Riemann 定积分的定义，我们知道级数和积分的联系很密切. 对于 $f(x)\in R[a,b]$，对区间 $[a,b]$ 上任意分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，以及 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的任意点 ξ_k，记 $\Delta_k=x_{k+1}-x_k$. 如果有 $\lim_{n\to\infty}\max\Delta_k=0$，则有

$$\lim_{\max\Delta_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta_k=\int_a^b f(x)dx \tag{4.2.33}$$

特别地，我们可以取等距的 ξ_k，甚至是每个区间的端点，也能满足上式. 这启发我们，积分区间也可以

[2] 参见https://baike.baidu.com/item/%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%9E%97%E5%85%AC%E5%BC%8F/9583086

等分. 事实上，由积分区间的可加性，我们有

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f(x)dx \tag{4.2.34}$$

这相当于两点的 Lagrange 插值，即 $k=1$ 时 $y=a$；$k-1=n$，即 $k=n+1$ 时，$y=b$，则插值函数为

$$L(x,k) = \frac{k-(n+1)}{1-(n+1)}a + \frac{k-1}{(n+1)-1}b = a + \frac{(k-1)(b-a)}{n} \tag{4.2.35}$$

积分下限即为 $L(x,k)$，上限为 $L(x,k+1)$.

这就引出了积分判别法：

定理 4.2.4

对于 $[N,+\infty)$ 上的 (非负) 减函数 $f(x)$，正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

证明. ($\Rightarrow$) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 其和为 S, 则

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

又 f 为 $[N,+\infty)$ 上的减函数, 因此 $f(x)\geq 0$, 故条件中 f 非负可以省略。那么 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ 为正项级数, 于是对任意 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_N^{N+m} f(x)dx = \sum_{n=1}^{m}\int_{n+N-1}^{n+N} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{m} f(n+N-1) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = S$$

由于 f 单调递减, 因此对任意的 $A>0$, 有

$$0 \leqslant \int_N^{N+A-1} f(x)dx \leqslant \int_N^{m+N} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{m+1} f(n+N-1) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = S\,,(m<A\leq m+1)$$

由比较原则 (有界) 可知反常积分 $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

($\Leftarrow$) 设反常积分

$$\int_N^{+\infty} f(x)dx$$

收敛, 因此

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

又 f 为 $[N,+\infty)$ 上的减函数, 因此 $f(x)\geq 0$ 那么 $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ 为正项级数。因此, 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$\sum_{n=N+1}^{m} f(n) \leqslant \int_N^m f(x)dx \leqslant \int_N^{+\infty} f(x)dx \leqslant M$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. □

注: 由于改变级数的有限项，不影响级数的敛散性，因此我们可以从 N 开始讨论.

题目 4.2.8. 讨论 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解: 只需判断 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性即可.

(1) 当 $p > 1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p} \tag{4.2.36}$$

收敛，故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛.

(2) 当 $p = 1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty \tag{4.2.37}$$

发散，故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散.

(2) 当 $p < 1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^{+\infty} = +\infty \tag{4.2.38}$$

发散，故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散.

故 p 级数，当 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散.

题目 4.2.9. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 的敛散性.

解: 考虑反常积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln x|_2^{+\infty} = +\infty \tag{4.2.39}$$

故原级数发散.

同理可证 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$ 发散.

拉贝判别法

对于极限形式的级数敛散性判别法，我们无法判断极限为 1 的情况. 前面所提及的判别法，比值判别法和根式判别法，它们其实以等比级数为比较对象. 但有时候级数收敛，但收敛速度慢于等比级数，此时这两种判别法就无法使用了. 为此，我们需要修改比较的对象，让收敛速度慢“一点点”. 从直观上来看，等比级数的收敛速度是非常快的，因此我们自然会想找一个收敛速度稍微慢一点的级数. p 级数刚好满足这一要求，因此我们有下面的拉贝（Raabe）判别法：

定理 4.2.5： 拉贝判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在 $N>0$ 以及**常数** r，

(i) 若对任意 $n>N$，有

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r>1 \tag{4.2.40}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 若对任意 $n>N$，有

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1 \tag{4.2.41}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

类似地，拉贝判别法也有极限形式

推论 4.2.6： 拉贝判别法极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r \tag{4.2.42}$$

(i) 当 $r>1$ 时，原级数收敛；

(ii) 当 $r<1$ 时，原级数发散.

注: 这里要注意，此时 $r>1$ 收敛，$r<1$ 发散，和前面判别法刚好相反.

注: 至于上下极限的形式，读者可以仿照之前的推论写出来：

1. 若 $\varliminf_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>1$，则 $\sum u_n$ 收敛；
2. 若 $\varlimsup_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)<1$，则 $\sum u_n$ 发散；

题目 4.2.10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\dots\cdot(x+n)}$ 的敛散性.

解: $u_n=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\dots\cdot(x+n)}$，那么有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(x+1)(x+2)\cdot\dots\cdot(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdot\dots\cdot(x+n)(x+n+1)}=\frac{n+1}{x+n+1}\to 1(n\to\infty) \tag{4.2.43}$$

因此比值判别法和根式判别法失效[3]. 使用 Raabe 判别法，我们有

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\frac{n}{x+n+1}x\to x(n\to\infty) \tag{4.2.44}$$

[3]这里不要认为 $x>0$ 时，$\frac{n+1}{x+n+1}<1$ 就能使用比值判别法，此时无法找到一个确定的 r，使得 $r<1$ 严格成立. 特别地，$x=1$ 时，原级数发散

因此，$x>1$ 时原级数收敛，$x<1$ 时原级数发散，$x=1$ 时原级数为调和级数（缺第一项）发散.

综上，$x>1$ 时原级数收敛，$x\leqslant 1$ 时原级数发散.

事实上，Raabe 判别法 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 等价于 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$，请读者自行证明.

4.3 正项级数敛散性判别法（拓展）

我们之前讨论过，所谓级数敛散性判别法，实际上是在和已知敛散性的级数进行比较，根据被比较级数的不同，我们可以得到不同的判别法. 由于不存在收敛速度**最快**的级数，因此我们无法找到一种完美的级数敛散性判别法，也即难以解决 $r=1$ 的情况. 下面，我们将介绍一些其它的级数敛散性判别方法，它们通过比较不同的收敛级数，得到了不同的判别法.

首先，我们先看一道题.

题目 4.3.1. 若极限 $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r$，则极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ 存在，且取值相等.

证明.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_1}\right)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_1}{a_2}\right)}{\ln n} \tag{4.3.1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{a_{n-1}}{a_n}}{\ln n}\overset{Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1+1\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{4.3.2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r \tag{4.3.3}$$

□

但是反过来，由于 Stolz 逆定理不一定成立，所以上述步骤的推导不一定可逆，也就是说，使用 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ 判别比 $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r$ 更有效. 因为前者能够判断时，后者一定能判断，但后者能判断时，前者不一定能判断.

通过这个证明，就引出了对数判别法.

对数判别法

定理 4.3.1： 对数判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=q \tag{4.3.4}$$

(i) 当 $q>1$ 时，原级数收敛；

(ii) 当 $q<1$ 时，原级数发散.

4.4 一般项级数敛散性判别法

第 5 章　反常积分