目录

第 1 章　极限与连续

1.1　单调有界定理

题目 1.1.1.　求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

解:

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\overbrace{1\cdots1}^{n-2\text{个}1}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \to 1(n\to\infty)$$

定理 1.1.1：　单调有界定理

有界的单调数列必收敛.

题目 1.1.2.　证明单调有界定理.

证明. 不妨设 a_n 单调递增，$a=\sup a_n$. 则由上确界的定义立知 $a_n\leqslant a$，且 $\forall\varepsilon>0, a-\varepsilon<a$，故存在 $N>0$，使得 $a_N>a-\varepsilon$.

故 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 对 $\forall n>N$, 有：

$$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant a<a+\varepsilon \tag{1.1.1}$$

故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. □

题目 1.1.3.　若单调数列 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛.(注意与单调有界定理相比较)

证明. **法一:** 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增,只需证明 $\{a_n\}$ 有上界即可. 设子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛,则 $\exists M>0, s.t. a_{n_k}<M$. 但对任意的 k，由于 $k\leqslant n_k$，故 $a_k\leqslant a_{n_k}<M$.

因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

法二：不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 设 $\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=a$. 故 $\forall\varepsilon>0,\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$$

当 $n>n_{K+1}$ 时，存在 $m>n>K+1$，使得 $n<m\leqslant n_m$. 故 $a_{n_{K+1}}<a_n\leqslant a_{n_m}$，也即：

$$-\varepsilon<a_{n_{K+1}}-a<a_n-a\leqslant a_{n_m}-a<\varepsilon$$

也即 $\{a_n\}$ 收敛. □

1.2 Stolz 定理

定理 1.2.1： Stolz 定理

1.($\frac{*}{\infty}$) 设 x_n(严格) 单调递增趋于无穷大，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$$

2.($\frac{0}{0}$) 设 x_n(严格) 单调递减趋于 0，且 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$$

注: 极限等式成立的前提，除了对单调性和极限有要求外，还要求 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ $(*)$ 必须存在（包括非正常极限）. 满足题干条件外，当 $(*)$ 极限为 $+\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=+\infty$；当 $(*)$ 极限为 $-\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=-\infty$.

注: 不能认为 $(*)$ 式极限不存在，则左式极限一定不存在. 例如取 $y_n=(-1)^n, x_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$, 但 $\frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{(n+1)-n}=2\cdot(-1)^{n+1}$ 极限不存在.

注: 在满足特定的条件下才有 Stolz 逆定理 (即使用左式极限推右式). 例如，当 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 和 $(*)$ 极限均存在时，我们可以利用 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 的极限计算 $(*)$ 的极限. 当然，Stolz 逆定理还有一些其它的版本，但比较复杂，目前用不到.

题目 1.2.1. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{(n)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}a_n=a \tag{1.2.1}$$

注: 当 a 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 也成立.

题目 1.2.2. 若 $a_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$.

解: 1. 当 $a=0$ 时，有

$$0\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0(n\to\infty) \tag{1.2.2}$$

2. 当 $a\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n)}{n}}=e^{\ln a}=a \tag{1.2.3}$$

题目 1.2.3. 求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}$$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sum_{k=1}^{n+1}k^{2020}-\ln\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)}\tag{1.2.4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+1)^{2020}}{\sum_{k=1}^{n}k^{2020}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2020}}\tag{1.2.5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}=\int_0^1x^{2020}dx=\frac{1}{2021}\tag{1.2.6}$$

题目 1.2.4. 设 $x_{n+1}=\sin x_n, x_1\in(0,\pi)$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n$

解: 显然 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0，故：

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x_n}-\frac{1}{x_n^2}}\tag{1.2.7}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x}{x^2-\sin^2x}=3\tag{1.2.8}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$$

注: 读者可思考一下，在进行计算时，为什么使用 $\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$，而不是 $\frac{x_n^2}{\frac{1}{n}}$？

注: 本题还可以“加边”，即再次使用 Stolz 定理，可以求得 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)=\frac{3}{10}$. 不过不要先着急求，我们再看一个稍微“复杂”一点的题目.

题目 1.2.5. 设 $x_1=1,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$，求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(x_n-\sqrt{2n})}{\ln n}$$

解: 第一步，我们首先求 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{2n}}$. 由于 x_n 单调递增到 ∞[1]，因此我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+x_n}{2x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+\frac{1}{x_n}}{2x_n}=1\tag{1.2.9}$$

[1] 单调易见，使用反证法可看出趋于无穷

我们得到一个很有用的结论：$x_n \sim \sqrt{2n}, n \to \infty$.

那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n^2 - 2n)}{(x_n + \sqrt{2n}) \ln n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 2n}{\ln n} \tag{1.2.10}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2 - 2}{\frac{1}{n}} \tag{1.2.11}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}\right) - x_n^2 - 2}{\frac{2}{x_n^2}} = \frac{1}{4} \tag{1.2.12}$$

注: 我们观察计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}(x_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$ 的步骤，发现有多处使用了 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 的结果. 事实上，这是一种做题技巧。

具体来说，我们要使用 Stolz 定理，尤其是递推数列算一个分式的极限的时候，我们尽可能要消去 n(不包括数列 $\{x_n\}$ 中的 n)，换句话说，就是统一变量。把含有 n 的式子尽量化为 $a_n + kn$ 的形式，且也不是分式，这就解释了为什么刚才我们不使用 $\frac{x_n^2}{\frac{1}{n}}$ 来计算.

另外，求解 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2n}}$ 也很自然了. 一方面是使用有理化，把 $\sqrt{2n}$ 变为 $2n$ 时要用到，另一方面把 $\frac{1}{n}$ 化为 $\frac{2}{x_n^2}$ 要用到.

把所有显含 n 的式子转化为数列后，我们可以使用递推关系式统一变量，比如均转化为 x_n. 这样，再使用海涅归结原则，我们只需求解其对应的函数极限即可.

1.3 Cauchy 收敛准则

定理 1.3.1： 数列收敛的 Cauchy 准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$，有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \tag{1.3.1}$$

上述定理亦可等价为：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $n > N$，和一切 $p \in N^+$，均有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \tag{1.3.2}$$

题目 1.3.1. 若对任意的 $p \in N^+$，都有 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$，那么 $\{a_n\}$ 收敛吗？

解: $\{a_n\}$ 不一定收敛，比如取 $a_n = \sqrt{n}$，那么 $0 \leqslant |a_{n+p} - a_n| = |\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} \to 0 (n \to \infty)$

注: 极限不一定存在的原因：题目表述和 Cauchy 收敛定理并不等价，题目是指固定一个 p 后，我们能证明 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$，即找到一个 $N = N(p, \varepsilon)$；而 Cauchy 收敛准则则是固定了 $N = N(\varepsilon)$，再选取 p，此时 N 已经和 p 无关了，因此 Cauchy 收敛准则的要求更高一些.

注: 将 $\lim_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$ 改为 $|a_{n+p}-a_n|\rightrightarrows 0$，即对于 $n\to\infty$ 时，关于 p 一致收敛. 则可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

定义 1.3.1： 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^o(x_0)$ 有定义，如果满足：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{1.3.3}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

定理 1.3.2： 函数极限存在的柯西收敛准则

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $U^o(x_0,\delta')$ 有定义，我们说它在 $x=x_0$ 处收敛，如果对于 $\varepsilon>0,\exists 0<\delta<\delta'$，使得 $\forall x',x''\in U^o(x_0,\delta)$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{1.3.4}$$

1.4 一致连续

定义 1.4.1： 一致连续

对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得任意 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{1.4.1}$$

注: 从直观上来看，柯西收敛准则和一致连续的定义很相似。它们主要的区别是，柯西收敛准则只考虑了 x_0 那一点的性质，而一致连续则考虑了全局的性质.

定理 1.4.1

闭区间上的连续函数一致连续.

定理 1.4.2： 一致连续的可加性

设函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[b,c](a<b<c)$ 一致连续，则 f 在 $[a,c]$ 上一致连续. 且当 $c=+\infty$ 或 $a=-\infty$ 也成立 (相应区间括号要进行修改).

题目 1.4.1. 若 $n\geqslant 2,n\in N^+$, 证明:
(1) 函数 $f(x)=x^{1/n}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续;

(2) 函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续.

证明. 首先，我们有

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{1.4.2}$$

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$，对任意 $x_1 \geqslant q1, x_2 \geqslant q1$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有：

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{x_1 - x_2}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_1^{\frac{n-2}{n}} x_2 + \cdots + x_2^{\frac{n-2}{n}} x_1 + x_2^{\frac{n-1}{n}}}\right| \tag{1.4.3}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}|x_1 - x_2| < \varepsilon \tag{1.4.4}$$

这说明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续，又由于 f 在 $[0, 1]$ 连续，故一致连续，因此函数 $f(x) = x^{1/n}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall 0 < \delta < \frac{1}{2}$, 存在 $x_1 = \frac{1}{\delta^2} > 1, x_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta^2} > 1$，即使 $|x_1 - x_2| < \delta$，有：

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1 x_2^{n-2} + x_2^{n-1}) > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{n}{\delta^2} > n > \varepsilon \tag{1.4.5}$$

故函数 $g(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续. □

注: 问题 (2) 当然也可取 $x_m = m + \frac{1}{m}, y_m = m$, 即使 $\lim_{m\to\infty}(x_m - y_m) = 0$, 但 $|x_m^n - y_m^n| > \frac{1}{m} \cdot mn > \varepsilon$.

定义 1.4.2： Lipschitz 连续

对于定义在区间 I 上的实值函数 $f(x)$，如果 $\forall x_1, x_2 \in I, \exists L > 0$ 使得：

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| \tag{1.4.6}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 连续.

题目 1.4.2. 证明 Lipschitz 连续的函数一致连续.

证明. Lipschitz 连续比一致连续条件要强，我们只需书写 Lipschitz 连续的定义，并限制 $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$，那么有：

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \tag{1.4.7}$$

得证. □

1.5 压缩映射定理

定理 1.5.1：压缩映射 1

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$a \in \mathbf{R}, r \in (0,1)$，若从某项开始，有：

$$|a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a| \tag{1.5.1}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且以 a 为极限.

证明. 假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始，有 $|a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a|$，那么：

$$0 \leqslant |a_n - a| \leqslant r|a_{n-1} - a| \leqslant r^2|a_{n-2} - a| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N}|a_N - a| \to 0(n \to \infty) \tag{1.5.2}$$

得证. □

定理 1.5.2：压缩映射 2

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$r \in (0,1)$，若从某项开始，有：

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}| \tag{1.5.3}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 首先，类似地假设从 $N \in \mathbf{N} > 0$ 开始，有 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}|$，那么 $\forall n > N, p \in \mathbf{N}^+$，我们有：

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r|a_n - a_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N}|a_{N+1} - a_N| \tag{1.5.4}$$

以及三角不等式，得到：

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| & (1.5.5)\\
&\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| & (1.5.6)\\
&\leqslant \left(r^{n-N+p+1} + r^{n-N+p} + \cdots + r^{n-N}\right)|a_{N+1} - a_N| & (1.5.7)\\
&= \frac{r^{n-N}(1 - r^{p+2})}{1 - r}|a_{N+1} - a_N| & (1.5.8)\\
&< \frac{r^{n-N}}{1 - r}|a_{N+1} - a_N| \to 0(n \to \infty) & (1.5.9)
\end{aligned}$$

得证. □

定理 1.5.3： 压缩映射 3

设 $\{a_n\}$ 为一数列，$y = f(x)$ 为定义在区间 I 的可微函数，$x_n \in I$ 且 $x_{n+1} = f(x_n)$. 若存在 $r \in (0,1)$，使得：

$$|f'(x)| \leqslant r < 1 \quad , \quad (x \in I) \tag{1.5.10}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且以 $f(x) = x$（其所有的解称之为**不动点**）的某个解为极限.

证明. 显然 $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|$. 然后使用压缩映射 1 定理即得 $\{x_n\}$ 极限存在.

另外，对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时取极限，得 $f(x) = x$，得证. □

注: 当压缩常数 $r = 1$ 时，上面三个定理一般都不成立，一个易见的例子是，取 $f(x) = x, x_n = n$.

题目 1.5.1. 设函数 $f : [a,b] \to [a,b]$, $|f'(x)| < 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 \in [a,b]$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，且不依赖于 x_1.

[分析]: 我们发现此时压缩常数为 1，无法使用压缩映射了. 而且 $|f'(x)|$ 不一定有连续性，所以不一定有最大值，因此我们需要想办法找到一个连续的函数 $H(x)$，使得 $\max_{x\in[a,b]} |H(x)| < 1$ 恒成立.

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$，则 $g(a) \geqslant 0, g(b) \leqslant 0$，则 $\exists x_0 \in [a,b]$, $s.t.\ f(x_0) = x_0$. 下面我们证明 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限. 取

$$|H(x)| = \begin{cases} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(\xi)| < 1 & , \ x \in [a,b]\backslash\{x_0\} \\ |f'(x_0)| & , \ x = x_0 \end{cases} \tag{1.5.11}$$

易知 $|H(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $|H(x)| < 1$，那么取 $r = \max_{x\in[a,b]} H(x) < 1$，因此：

$$|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant r|x_n - x_0| \tag{1.5.12}$$

注意上述不等式是使用 $|H(x)|$ 的性质推出的，而不是 Lagrange 中值定理. □

题目 1.5.2. 设函数 $f : [a,b] \to [a,b]$，且满足 $L = 1$ 的 Lipschitz 连续，若：

$$x_1 \in [a,b] \ , \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + f(x_n)\right] \tag{1.5.13}$$

证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

证明. 首先，我们有 $a \leqslant x_n \leqslant b$，以及：

$$x - y \leqslant f(x) - f(y) \leqslant y - x \ , \ y \geqslant x \tag{1.5.14}$$

令 $g(x)=\frac{1}{2}\left[x_n+f(x_n)\right]$，对 $\forall y\geqslant x$，有：

$$g(y)-g(x)=\frac{y-x-[f(x)-f(y)]}{2}\geqslant 0 \tag{1.5.15}$$

故 $g(x)$ 单调递增. 由 $x_{n+1}=g(x_n)$，不妨设 $x_2\geqslant x_1$，则 $x_3=g(x_2)\geqslant g(x_1)=x_2$，一直递推下去可知 $x_{n+1}\geqslant x_n$；若 $x_2\leqslant x_1$，则 $x_3=g(x_2)\leqslant g(x_1)=x_2$，一直递推下去可知 $x_{n+1}\leqslant x_n$.

因此 $\{x_n\}$ 单调有界必收敛. □

1.6 杂题

题目 1.6.1. 求解下列问题：

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n},k\in\mathbf{R}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n},\alpha\in\mathbf{R}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$$

(4)$a_1=\beta>0,a_{n+1}=\sqrt{\beta+a_n}$，判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 是否存在，并给出理由和极限值 (如极限存在).

解: (1)$k\leqslant 0$ 易证，当 $k>0$ 时，

法一：事实上，由泰勒展开，取 $m=\lfloor k\rfloor+2$ 易得 $e^n>\frac{n^m}{m!}$，那么：

$$0<\frac{n^k}{e^n}\leqslant\frac{m!}{n^{m-k}}<\frac{M}{n}\to 0(n\to\infty) \tag{1.6.1}$$

法二：我们还能使用洛必达法则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n/k}}\right)^k=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k}{e^{n/k}}\right)^k=0 \tag{1.6.2}$$

综上，我们知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{e^n}=0$.

(2) 由 $n\alpha-1\leqslant\lfloor n\alpha\rfloor\leqslant n\alpha$，可知：

$$\alpha-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}\leqslant\alpha \tag{1.6.3}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}=\alpha$.

(3) 使用 Stolz 定理即可.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \tag{1.6.4}$$

(4) 取 $a=\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}>1$，且满足 $a^2=a+\beta$，则：

$$|a_{n+1}-a|=\left|\sqrt{\beta+a_n}-a\right|=\left|\sqrt{\beta+a_n}-\sqrt{a+\beta}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{\beta+a_n}+\sqrt{a+\beta}} \tag{1.6.5}$$

记 $C=\sqrt{\beta+a_n}+\sqrt{a+\beta}$, 则 $C>\sqrt{a+\beta}>\sqrt{1+\beta}>1$，故 $|a_{n+1}-a|<\frac{1}{C}|a_n-a|$.

由压缩映射原理，知 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

1.7 压缩映射-进阶

推论 1.7.1： 二阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果满足

$$|a_n-a|\leqslant p|a_{n-1}-a|+q|a_{n-2}-a| \tag{1.7.1}$$

其中 $p,q>0\wedge p+q<1$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

证明. 假设

$$|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a|\leqslant k(|a_{n-1}-a|+\lambda|a_{n-2}-a|) \tag{1.7.2}$$

得到方程组:

$$\begin{cases}k\lambda=q\\ k-\lambda=p\end{cases} \tag{1.7.3}$$

随便取一对解即可，这里取 $k=\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2},\lambda=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$.
于是如此迭代，便得到:

$$\begin{aligned}|a_n-a|+\lambda|a_{n-1}-a|&\leqslant k(|a_{n-1}-a|+\lambda|a_{n-2}-a|) &(1.7.4)\\ &\leqslant k^2(|a_{n-2}-a|+\lambda|a_{n-3}-a|) &(1.7.5)\\ &\leqslant\cdots &(1.7.6)\\ &\leqslant k^{n-1}(|a_1-a|+\lambda|a_0-a|) &(1.7.7)\end{aligned}$$

下面我们证明 $k<1$，也即

$$\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2}<1\Leftrightarrow\sqrt{p^2+4q}<2-p\Leftrightarrow p^2+4q<4-4p+p^2\Leftrightarrow p+q<1 \tag{1.7.8}$$

设于是令 $n \to \infty$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} (|a_n - a| + \lambda |a_{n-1} - a|) = 0 \tag{1.7.9}$$

由于

$$0 \leqslant |a_n - a| \leqslant |a_n - a| + \lambda |a_{n-1} - a| \tag{1.7.10}$$

$$0 \leqslant |a_{n-1} - a| \leqslant \frac{1}{\lambda}|a_n - a| + |a_{n-1} - a| \tag{1.7.11}$$

因此我们可以知道 $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

从上述推导过程中可以看到，其实也可以允许 p, q 小于 0 的，但是要增加条件. 即一方面求根公式时，根式下方的东西要大于等于 0，即 $p^2 + 4q \geqslant q0$，另一方面 $p < 2$，且 $q \neq 0$。 □

推论 1.7.2： 高阶线性递推数列压缩映射

对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果从某项开始，满足

$$|a_n - a| \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i |a_{n-i} - a| \tag{1.7.12}$$

其中 $\sum_{i=1}^{m} p_i < 1, p_i > 0$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

使用连续函数的介值性解特征方程即可.

证明详见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/1961736760292796066.

题目 1.7.1. 设 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right), x_1 = x_0^2, x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2}$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1 < x_n \leqslant 4$ 假设 $\{x_n\}$ 极限存在为 $x \geqslant 1$，则 $x = \sqrt{x} + \frac{x}{2}$，$x = 0$(舍去) 或 $x = 4$.

由于：

$$|x_{n+1} - x| = \left|\sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} - \sqrt{x} - \frac{x}{2}\right| \leqslant |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \tag{1.7.13}$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \tag{1.7.14}$$

$$< \frac{1}{3}|x_n - x| + \frac{1}{2}|x_{n-1} - x| \tag{1.7.15}$$

故 $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 2$.

1.8 关于不动点的再讨论

对于压缩映射-3 中定义的 $x_{n+1} = f(x_n)$. 如果我们能够得到 $f(x)$ 的单调性，那么我们能否得到数列 $\{x_n\}$ 的单调性呢？答案是肯定的！下面我们具体分析一下：

如果 $f'(x) \geqslant 0$，即 $f(x)$ 单调递增，那么假设 $x_2 \geqslant x_1$，则有 $x_3 = f(x_2) \geqslant f(x_1) = x_2$，以此类推，可得到 $x_{n+1} \geqslant x_n$；若 $x_2 \leqslant x_1$，则 $x_3 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = x_2$，以此类推，可得到 $x_{n+1} \leqslant x_n$. 即如果已经知道 $f(x)$ 单调递增，那么数列 $\{x_n\}$ 的单调性之与前两项 x_1 和 x_2 的大小有关了.

如果 $f'(x) \leqslant 0$，即 $f(x)$ 单调递减，那么假设 $x_2 \geqslant x_1$，则有 $x_3 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = x_2$，$x_4 = f(x_3) \geqslant f(x_2) = x_3$，以此类推，可知 $x_{2n} \geqslant x_{2n-1}$，$x_{2n+1} \leqslant x_{2n}$. 若 $x_2 \leqslant x_1$，则 $x_3 = f(x_2) \geqslant f(x_1) = x_2$，$x_4 = f(x_3) \leqslant f(x_2) = x_3$ 以此类推，可知 $x_{2n} \leqslant x_{2n-1}$，$x_{2n+1} \geqslant qx_{2n}$.

更进一步，如果我们知道了 x_1 和 x_3 之间的大小关系，假设 $x_1 \leqslant x_3$，那么 $x_4 = f(x_3) \leqslant f(x_1) = x_2$，$x_5 = f(x_4) \geqslant f(x_2) = x_3$，不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递减，$\{x_{2n+1}\}$ 单调递增. 若 $x_1 \geqslant qx_3$，那么 $x_4 = f(x_3) \geqslant qf(x_1) = x_2$，$x_5 = f(x_4) \leqslant f(x_2) = x_3$，不难发现 $\{x_{2n}\}$ 单调递增，$\{x_{2n+1}\}$ 单调递减.

事实上，由于 $f(x)$ 单调递减，那么 $F(x) = f(f(x))$ 单调递增，那么 $F(x_n) = f(f(x_n)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$，使用刚才的结论可知数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的单调性和 x_1 与 x_3 的大小有关.

因此我们有以下推论：

推论 1.8.1

设 a 为 f 的不动点，f 在 $x = a$ 点连续，在 $U(a, r)$ 中严格单调递增，且在 $(a-r, a)$ 上有 $f(x) > x$，在 $(a, a+r)$ 上有 $f(x) < x$，证明：若 $a_{n+1} = f(a_n)$，且 $a_1 \in U^o(a, r)$，则 $\{a_n\}$ 严格单调，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

证明. 首先，$x = a$ 为 f 在 $U(a, r)$ 上的唯一不动点，设 $a_1 \in (a-r, a)$，则 $a_2 = f(a_1) < f(a) = a$，故 $a_1, a_2 \in (a-r, a)$，则 $a_2 = f(a_1) > a_1$，即 $a_1 < a_2 < a$. 以此类推可知 $a_n < a$，且 $\{a_n\}$ 单调递增并有上界，且极限为 a(因为唯一不动点).

同理，设 $a_1 \in (a, a+r)$，则 $a_2 = f(a_1) > f(a) = a$，故 $a_1, a_2 \in (a, a+r)$，则 $a_2 = f(a_1) < a_1$，即 $a < a_2 < a_1$. 以此类推可知 $a_n > a$，且 $\{a_n\}$ 单调递减并有下界，且极限为 a. □

题目 1.8.1. 设 $x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$. 问：$b$ 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛？并求极限值.

解: 首先解 $x = \frac{1}{2}(x^2+1)$，得 $x = 1$，因此数列 $\{x_n\}$ 如果收敛，只能以 1 为极限. 令 $f = \frac{1}{2}(x^2+1)$,$f'(x) = x$，故 f 在 $x < 0$ 单调递减，在 $x \geqslant 0$ 单调递增. 在 $(0, 1)$，有 $f(x) < 1$，在 $(1, +\infty)$，有 $f(x) > 1$.

又由于 $x_1 = b$ 和 $x_1 = -b$ 对极限没有影响，因此可以假定 $b \geqslant 0$，最后再对称区间即可，那么 $x_n \geqslant 0$.

当 $0 \leqslant b \leqslant 1$ 时，$1 \geqslant qx_2 = \frac{b^2+1}{2} \geqslant qb = x_1$，$1 \geqslant qx_3 = f(x_2) \geqslant qf(x_1) = x_2$，归纳可知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，故收敛，且以 1 为极限.

当 $b > 1$ 时，$x_n > 1$，但 $x_2 = \frac{b^2+1}{2} > b = x_1$，以此递推，仍能得到 $\{x_n\}$ 单调递增，但 $x_n > 1$，故 $\{x_n\}$ 不会以 1 为极限，那么 $\{x_n\}$ 发散.

因此 $-1 \leqslant b \leqslant 1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛，且极限值为 1，其余情况发散.

1.9 函数形式的 Stolz 定理

除了数列，其实函数也有 Stolz 定理，不过不经常使用. 因此放到最后供查阅和有能力的同学学习.

定理 1.9.1： Stolz 定理的函数形式

- $(\frac{*}{\infty})$ 若 $T>0$ 为常数，且满足：
    1. $g(x+T)>g(x)$, $\forall x \geqslant a$;
    2. $g(x) \to +\infty (x \to +\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;
    3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=l$.
- $(\frac{0}{0})$ 若 $T>0$ 为常数，且满足：
    1. $0<g(x+T)<g(x)$, $\forall x \geqslant a$;
    2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;
    3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=l$.

由上述定理，我们可以推出 Cauchy 定理：

定理 1.9.2： Cauchy 定理

若 f 在 $(a,+\infty)$ 内有定义, 且内闭有界，则

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geqslant c>0)$，当右边极限存在时成立.

证明. 1. 取 $g(x)=x$，$T=1$，则满足：

- $g(x+1)>g(x)$, $\forall x \geqslant a$;
- $g(x) \to +\infty (x \to +\infty)$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

因此我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

2. 首先，$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}}$. 又由于 $f(x)>0$，且满足函数的 Stolz 定理，可得：

$$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x+1))-\ln(f(x))}{x+1-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} \tag{1.9.1}$$

□

第 2 章　实数的完备性

直观上，实数完备性意味着实数轴上没有“间隙”（以理查德·戴德金的说法）。这是实数区别于有理数的特点，有理数在数轴上是有间隙的，即无理数。在十进制计数法下，实数的完备性等价于：实数与一个十进制小数表示一一对应。一般情况下我们认为实数的完备性主要有 8 个定理 (当然也有人说 10 个，参见https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870)，其中 6 个最为重要 (和书上一致)，下面我将叙述 8 个定理的版本，并将所有定理一一罗列出来：

2.1　实数完备性定理

定义 2.1.1：　Dedekind 分割

将实数集 $\mathbf{R}$ 分为两个子集 S 和 T，且满足：

(1)$S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset$;

(2)$\mathbf{R} = S \cup T$;

(3)$\forall x \in S, \forall y \in T$，总有 $x < y$，其中 S 称为左集，T 称为右集.

由上述定义得到的对实数集 $\mathbf{R}$ 的一个分割称为 **Dedekind 分割**，记作 (S, T).

定理 2.1.1：　Dedekind 定理

实数集 $\mathbf{R}$ 的任一 Dedekind 分割 (S, T)，都唯一地确定一个实数 (称为中介数或中介点)，它或者是 S 的最大数 (此时 T 中无最小数)，或者是 T 的最小数 (此时 S 中无最大数).

定理 2.1.2：　确界原理

对于非空数集 S，如果它有上界，则必有上确界；如果它有下界，则必有下确界.

定理 2.1.3：　致密性定理

有界数列必有收敛子列.

定理 2.1.4：　单调有界定理

单调（从某项开始单调即可）且有界（递增只需有上界；递减只需有下界）的数列必收敛.

定理 2.1.5：　Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall m, n > N$，有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

定理 2.1.6： 闭区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

那么在 $\mathbf{R}$ 中唯一地存在一点 ξ，使得

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \tag{2.1.1}$$

定义 2.1.2： 聚点（极限点）- 1

设 S 为数轴的点集，ξ 为某一确定的点. 如果 ξ 的任何邻域都含有 S 的无穷多个点，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2.1.3： 聚点（极限点）- 2

对于点集 S，若点 ξ 的任何 ε 邻域都含有 S 中异于 ξ 的点，即 $U^o(\xi, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义 2.1.4： 聚点（极限点）- 3

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$，则其极限 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点.

定理 2.1.7： Weierstrass 聚点定理

$\mathbf{R}^n$ 中任何有界无穷点集至少有一个聚点.

定义 2.1.5： 开覆盖

对于一个数集 S，以及由一些互不相等（可有非空交集）的开区间（不为无穷区间）组成的点集

$$H = \bigcup_{k=1}^{n} S_i \tag{2.1.2}$$

若满足 $S \subset H$，则称 H 为 S 的一个开覆盖. 当 n 为有限数时，称为有限开覆盖，$n = \infty$ 时称为无限开覆盖.

定理 2.1.8： Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间 $[a, b]$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖。

一般情况下，证明有限覆盖定理需要使用反证法，而从有限覆盖定理证明其它定理则需要根据一些性质构造开覆盖. 而使用闭区间套定理证明某些性质时，往往采用二分法分割区间.

2.2 例题

题目 2.2.1. 证明对任意实数 α，均存在一个有理数列 a_n，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

证明. 取 $a_n = \dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$ 即可. □

题目 2.2.2. 证明有理数集 $\mathbb{Q}$ 是不完备的.

证明. 同上题,如果我们取 $\alpha = \pi$,虽然 a_n 趋向于 π,但在 $\mathbb{Q}$ 里找不到一个数 p,使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = p$. □

由于实数完备性等价定理较多，难度较大，因此不可能把所有的用法和证明详细写出来. 下面，我仅列举一些重要的题目，以示实数完备性定理的应用：

题目 2.2.3. 用闭区间套定理证明零点定理.

[分析]: 零点定理，指的是连续函数 $f(x)$ 如果在闭区间 $[a,b]$ 的端点处取值异号，那么 f 在区间内至少含有一个零点. 因此，我们想办法找到某一点，使得 $f^2(\xi) \leqslant 0$，那么就能得到 $f(\xi) = 0$.

证明. 设 $f \in C[a,b], f(a)f(b) < 0$，那么我们取 $a_1 = a, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$，为第一个闭区间. 取 $c_1 = \frac{a_1+b_2}{2}$，若 $f(c_1) = 0$，则已经得证，否则可以在 $f(a)f(c_1)$ 和 $f(c_1)f(b)$ 中找到一个小于 0 的表达式，不妨设 $f(a)f(c_1) < 0$，取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, I_1 = [a_2, b_2]$，依次类推. 如果找不到一个 $f(c_i) = 0$，那么我们可以得到一个闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$;

(3)$f(a_n)f(b_n) < 0$.

那么由闭区间套定理知，唯一存在一个点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$.

于是

$$f^2(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0 \tag{2.2.1}$$

□

也即 $f(\xi) = 0$.

题目 2.2.4. 用闭区间套定理证明聚点定理.

证明. 由于 S 为有界点集，那么存在 $M > 0$，使得 $S \subset [-M, M]$. 记 $a_1 = -M, b_1 = M$. 仿照上题取 $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1, c]$ 和 $[c, b_1]$ 中至少有一个含有 S 中无穷个点，可记为 $[a_2, b_2]$. 同理，一直这样取下去，我们可以得到一列闭区间 $[a_n, b_n]$，满足：

(1)$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2M}{2^{n-1}}=0$;

这是一个闭区间套，由闭区间套定理，知存在一点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由极限的定义，知存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$. 由定义知 ξ 为 S 的一个聚点. □

题目 2.2.5. 用闭区间套定理证明有限覆盖定理.

解: 反证法：假设不能用 H 的有限项覆盖 $[a,b]$. 即 $a_1=a,b_1=b$，同理取 $c_i=\frac{a_i+b_i}{2}$. 那么 $[a_1,c]$ 和 $[c,b_1]$ 中至少有一个不能用 H 的有限项覆盖 $[a,b]$，可记为 $[a_2,b_2]$. 同理，一直这样取下去，我们可以得到一列闭区间 $[a_n,b_n]$，满足：

(1)$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$;

这是一个闭区间套，由闭区间套定理，知存在一点 ξ，使得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由于 H 是一个开覆盖，那么必存在一个区间 $(\alpha,\beta)\in H$，使得 $\xi\in(\alpha,\beta)$. 由极限的定义，知存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$. 这与 $[a_n,b_n]$ 的选取矛盾！故原命题成立.

题目 2.2.6. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

证明. 设 $f(x)\in C[a,b]$. 首先，对于闭区间上的一点 $x_0\in[a,b]$，我们有 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_{x_0})$ 是有界的（根据极限的定义可知），记界为 M_{x_0}. 当 $x\in U(x_0,\delta_{x_0})\cap[a,b]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M_{x_0}$. 令

$$H=\{U(x_0,\delta_{x_0})||f(x)|\leqslant M_{x_0}\ ,\ x\in U(x_0,\delta_{x_0})\cap[a,b]\}\tag{2.2.2}$$

那么 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故存在一个有限子覆盖

$$H'=\{U(x_i,\delta_{x_i})|U(x_i,\delta_{x_i})\in H,i=1,2,\cdots,n\}\tag{2.2.3}$$

取 $M=\max\{M_{x_1},M_{x_2},\cdots,M_{x_n}\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$. □

题目 2.2.7. 用致密性定理证明闭区间上的连续函数的有界性.

[分析]: 致密性定理，指的是任何有界的数列必有收敛的子列. 如果采用正面直接证明法，我们不知道收敛数列的极限值，因此可能会遇到一些困难，故我们采用反证法.

证明. 反证法. 设 $f(x)\in C[a,b]$，但对任意 $M>0$，存在 $\{x_n\}\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|>M$.

取其收敛子列 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，则 $f(x_{n_k})\to f(x_0)(k\to\infty)$.[1]

那么由连续函数的局部有界性，知 $f(x_{n_k})$ 有界（否则不会收敛到 $f(x_0)$）. 但这与 $|f(x_{n_k})|>M$ 矛盾！故原命题得证. □

[1]由于 f 的连续性

第 3 章　上下极限

上下极限的用处非常大，只要数列有界，那么就有上下极限，因此可以通过上下极限求极限.

3.1　定义

上下极限的定义依附于聚点的定义，因此我们先介绍一下数列的聚点的定义：

定义 3.1.1：　数列的聚点

若数 a 的任一邻域含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

注: 这里无限多项指的是数列的项，而不是数字. 也就是说，如果 $x_n = 1$，那么 1 就是数列的聚点.

从聚点的定义可以看出，如果一个数列 $\{x_n\}$ 有极限 a，那么该极限一定是数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

那我们自然会问，如果数列极限不存在呢？比如非正常极限 ∞（无界），或者是有界的数列 $(-1)^n$ 等，我们又该如何处理呢？

我们首先讨论有界的数列. 依聚点的定义，我们知 $(-1)^n$ 有两个聚点 -1 和 1，$\sin\frac{n\pi}{4}$ 有五个聚点 $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$. 由于这些数列都是有界的，因此我们猜测有界的数列必有聚点，即使极限不存在. 事实也的确如此：

定理 3.1.1：　有界数列聚点存在和最值性

对于有界数列 $\{x_n\}$ 至少含有一个聚点，且存在最大聚点和最小聚点.

证明. 因数列有无穷多项，因此可以使用闭区间套定理，每次二分区间，选择含有无穷多项的区间 $[a_k, b_k]$，可得到一个闭区间套，故可知聚点存在.

下面证明最值性，对于最大聚点，只需在选择区间时，优先选择右侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取左边的区间，由此得到的为最大聚点. 若不然，还存在更大的聚点 $\xi' > \xi$，则取 $\delta = \frac{1}{3}(\xi' - \xi) > 0$，则在 $U(\xi', \delta)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项.[1]，但 n 充分大时，$U(\xi', \delta)$ 全部落在 $[a_n, b_n]$ 右侧，这与优先选取右侧区间步骤相矛盾，故 ξ 为最大区间.

对于最小聚点也同理，优先选择左侧的区间，如果不满足无穷多项的条件，就取右边的区间，由此得到的为最小聚点. □

对于最大聚点和最小聚点，我们分别称为上极限和下极限.

[1] 依聚点的定义可知.

定义 3.1.2： 上下极限

有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点 L 和最小聚点 l 分别称为上极限和下极限，并记作

$$L = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \quad , \quad l = \varliminf_{n\to\infty} x_n \tag{3.1.1}$$

因此有界数列一定有上下极限. 下面我们介绍一下上下极限的几个重要的定理，以便后续使用.

定理 3.1.2： 上下极限不等式

对于有界数列 $\{x_n\}$，我们有：

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \tag{3.1.2}$$

证明. 依上下极限的选取可知该定理成立. □

定理 3.1.3： 数列收敛的充要条件

有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n \tag{3.1.3}$$

证明. $(\Rightarrow)$ 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\{x_n\}$ 只有一个聚点 A[2]，故 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n$.

$(\Leftarrow)$ 若 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = A$，由上下极限的选取，可知仅能选取一个聚点 A，但又由聚点的定义和数列收敛的定义，知 A 即为 $\{x_n\}$ 的极限值. □

定理 3.1.4： 上下极限的保不等式

设有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，且从某项起，有 $a_n \leqslant b_n$，则：

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n \quad , \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n \tag{3.1.4}$$

又若存在 $\alpha \leqslant \beta$，且从某项起，有 $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$，则：

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \beta \tag{3.1.5}$$

注: 不要认为也满足 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$. 我们可以构造一个反例，令

$$a_n = \begin{cases} 1 & ,n\text{为奇数} \\ 0 & ,n\text{为偶数} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} 2 & ,n\text{为奇数} \\ 0.5 & ,n\text{为偶数} \end{cases} \tag{3.1.6}$$

[2] 数列收敛的等价定义

虽然 $a_n \leqslant b_n$，但 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = 0$.

推论 3.1.1

对于有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，我们有：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \tag{3.1.7}$$

现在我们处理无界数列的情况. 我们发现，如果将 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看成一个点，那么它也满足聚点的定义. 即 $+\infty, -\infty$ 可能是无界数列的聚点. 对于这样形成的上下极限，我们称之为非正常上下极限，记法和一般的上下极限类似.

定义 3.1.3： 非正常上下极限

假设 $+\infty$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限，$-\infty$ 为数列 b_n 的下极限，那么：

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = +\infty \quad , \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, b_n = -\infty \tag{3.1.8}$$

在一般的讨论中，我们一般只讨论正常的上下极限，如非特别说明，下面考虑的上下极限均为有界数列的（正常）上下极限.

除此之外，上下极限还有另外一种定义：

定义 3.1.4： 上下极限确界定义

设 $\{x_n\}$ 为有界实数列，则有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} = \inf_n \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} \quad , \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} = \sup_n \inf_{k\geqslant n}\{x_k\} \tag{3.1.9}$$

注: 使用上确界数列不增（递减），下确界不减（递增）的性质可证上述等式成立.

注: 由上式可以看出，数列 $\{x_n\}$ 的上极限，就是 $\{x_k\}, k \geqslant n$ 的上确界的极限（上确界的下确界）；数列 $\{x_n\}$ 的下极限，就是 $\{x_k\}, k \geqslant n$ 的下确界的极限（下确界的上确界）.

3.2 Stolz 定理下极限形式

除了极限形式的 Stolz 定理，也存在上下极限形式的 Stolz 定理.

定理 3.2.1：上下极限形式的 Stolz 定理

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$. 若 $\{y_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$，则有：

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\tag{3.2.1}$$

证明. 只需证明第一个不等式和第三个不等式即可. 下面仅证第三个不等式：

设 $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=M$，则存在 $N,\varepsilon=\varepsilon(n)\to 0(n\to\infty)$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant M+\varepsilon\Leftrightarrow x_{n+1}-x_n\leqslant(y_{n+1}-y_n)(M+\varepsilon)\ (\text{注意}y_n\text{严格单调})\tag{3.2.2}$$

那么

$$\sum_{k=N}^{n}(x_{n+1}-x_n)\leqslant\sum_{k=N}^{n}(y_{n+1}-y_n)(M+\varepsilon)\Leftrightarrow x_{n+1}-x_N\leqslant(y_{n+1}-y_N)(M+\varepsilon)\tag{3.2.3}$$

因此

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\left(1-\frac{y_N}{y_{n+1}}\right)(M+\varepsilon)+\frac{y_N}{y_{n+1}}\leqslant M+k\varepsilon\tag{3.2.4}$$

两边同时取上极限，且由 ε 的任意性，得 $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant M=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. □

注: 也可以这样理解，如取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(M+\frac{k}{n}\right)=M=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\tag{3.2.5}$$

3.3 上下极限的一些例题

上下极限虽然方便和实用，但是很容易出错，首先由前面几个定理和推论可以看出，整体的上（下）极限，并不等于分开的式子取上（下）极限之后再求和. 另外，我们再给出几个等式，并在下面给出一些上下极限的例题.

推论 3.3.1： 上下极限等式

设 $\{x_n\}$ 为有界数列，则

- 加负号反转上下极限: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n)\quad ,\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n)$;
- 若 $\{y_n\}$ 收敛，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
- 当 $x_n \geqslant 0$ 时，有 $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)^2 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n^2$;
- 若 $f(x)$ 严格单调递增且 $f(x_n) > 0$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(x_n) > 0$ 恒成立，那么

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(x_n)}\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(x_n)} \tag{3.3.1}$$

一个特殊的例子就是取 $f(x)=x, x_n>0$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n > 0$，我们得到：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n}\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n} \tag{3.3.2}$$

- 若 $f(x)$ 严格单调递增且连续，那么

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right)\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right) \tag{3.3.3}$$

特别地，若 $f(x)\in C(a,b]$ 但在左端点不一点连续，$x_n\in(a,b]$，若满足 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n > a$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right) \tag{3.3.4}$$

若满足 $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > a$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right)\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right) \tag{3.3.5}$$

- 若 $f(x)$ 严格单调递减且连续，那么

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right)\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right) \tag{3.3.6}$$

特别地，若 $f(x)\in C(a,b]$ 但在左端点不一点连续，$x_n\in(a,b]$，以及 $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > a$，那么我们仍有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right)\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) = f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\right) \tag{3.3.7}$$

注: 设 $\{x_n\}$ 为区间 I 上的有界数列，函数 f 在 I 上连续. 对于一般的极限，只要函数连续，即可和

极限交换顺序. 但对于上下极限，即使函数连续，上下极限也不能随便和函数交换顺序，即

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(\varliminf_{n\to\infty} x_n) \tag{3.3.8}$$

当函数严格单调连续且有界（闭区间连续则显然有界）时可以交换顺序. 单调递增符号不变，单调递减上下极限符号反转.

题目 3.3.1. $x_n > 0, y_n > 0$ 且均有上界，试证明：

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.9}$$

当 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 的极限存在时取等.

[分析]: 直接证明两项相乘的式子似乎不太好证明，我们可以尝试将乘法变为加法，然后使用我们已知的加法的结论去证明. 本题主要考虑使用对数函数，将乘法变为加法再进行证明.

证明. 1^o 当某个数列上极限为 0 时，不妨设 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 0$，由于 $0 \leqslant l_x \leqslant L_x = 0$，故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. 又 $0 < x_n y_n < M \cdot x_n$ $(M > 0)$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0 = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.10}$$

2^o 当两个数列上极限均不为 0 时，那么我们有：

$$\ln\left(\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)\right) = \varlimsup_{n\to\infty} \ln(x_n y_n) = \varlimsup_{n\to\infty}(\ln x_n + \ln y_n) \tag{3.3.11}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \ln x_n + \varlimsup_{n\to\infty} \ln y_n = \ln \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \ln \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.12}$$

$$= \ln\left(\varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\right) \tag{3.3.13}$$

这说明

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.3.14}$$

当且仅当 $\ln x_n$ 或 $\ln y_n$ 极限存在时取等，也即 x_n 或 y_n 极限存在且大于 0.

证毕. □

题目 3.3.2. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解: 首先，易见 $1 \leqslant x_n \leqslant 2$ $(n \geqslant 3)$. 设 L, l 分别为 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限，则

$$L = 1 + \frac{1}{l} \quad , \quad l = 1 + \frac{1}{L} \tag{3.3.15}$$

可知 $L = l$，则 $\{x_n\}$ 收敛，设收敛到 x，则 $x = 1 + \frac{1}{x}$，得 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

题目 3.3.3. 有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

解: 首先 $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_{2n}\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ， $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_{2n}\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

设 $|a_n|$ 的上下极限分别为 L,l，那么：

$$0=\overline{\lim_{n\to\infty}}|2a_n+a_{2n}|\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(|2a_n|-|a_{2n}|)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|2a_n|+\underline{\lim_{n\to\infty}}(-|a_{2n}|)\tag{3.3.16}$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}|2a_n|-\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_{2n}|)\tag{3.3.17}$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|+\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|-\overline{\lim_{n\to\infty}}(|a_{2n}|)\right)\tag{3.3.18}$$

$$\geqslant L\tag{3.3.19}$$

但 $L\geqslant 0$，因此只能 $L=l=0$，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

题目 3.3.4. 设 $x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right),x_1=x_0^2,x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\frac{x_{n-1}}{2}$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限值.

解: 归纳易知 $1<x_n\leqslant 4$. 那么：

$$L\leqslant\sqrt{L}+\frac{L}{2}\ ,\ l\geqslant\sqrt{l}+\frac{l}{2}\tag{3.3.20}$$

则 $L=l=4$，故 $\lim_{n\to\infty}x_n=4$.

我们之前提到过：

> 对于任意的数列 $\{a_n\}$，以及一个确定的实数 a ，如果从某项开始，满足
>
> $$|a_n-a|\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i|a_{n-i}-a|\tag{3.3.21}$$
>
> 其中 $\sum_{i=1}^{m}p_i<1,p_i>0$. 那么我们有 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

[分析]: 我们考虑 $|a_n-a|$ 这个数列，如果想要使用上下极限证明，那么一定要先证明该数列有界，然后注意上下极限的不等式，进而推得结论.

我们现在使用上下极限证明一下：

证明. 首先，我们假设从 $n>N$ 开始，满足

$$|a_n-a|\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i|a_{n-i}-a|$$

取 $M=\max\{|a_1-a|,|a_2-a|,\cdots,|a_N-a|\}$，那么 $|a_i-a|\leqslant M(i=1,2\cdots,N)$.

使用第二数学归纳法，假设 $|a_k - a| \leqslant M$，那么

$$|a_{k+1} - a| \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i |a_{k-i} - a| \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i M < M \tag{3.3.22}$$

故有 $|a_n - a|$ 有界. 设其上下极限分别为 L, l，则：

$$L \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i L \Leftrightarrow \left(1 - \sum_{i=1}^{m} p_i\right) L \leqslant 0 \tag{3.3.23}$$

因此 $L = 0, 0 \leqslant l \leqslant L = 0$，故 $L = l = 0$，因此有 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

题目 3.3.5. 设 $a_1 = a > 0, a_2 = b > 0, a_{n+2} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} (n = 1, 2, \cdots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 易证 $2 \leqslant a_n \leqslant \frac{5}{2} (n \geq 3)$. 设 $x = 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$，即 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 = 0$，限制 $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$.

又 $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4) > 0$,故单调,且 $f(2) f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$,即存在唯一 $x_0 \in \left(2, \frac{5}{2}\right), s.t. f(x_0) = 0$，即 $x_0 = 2 + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}$.

那么

$$|a_{n+2} - x_0| = \left|2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} - 2 - \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| \tag{3.3.24}$$

$$\leqslant \left|\frac{(a_{n+1} - x_0)(a_{n+1} + x_0)}{x_0^2 a_{n+1}^2}\right| + \left|\frac{(a_n - x_0)(a_n + x_0)}{x_0^2 a_n^2}\right| \tag{3.3.25}$$

$$\leqslant \frac{5}{16} |a_{n+1} - x_0| + \frac{5}{16} |a_n - x_0| \tag{3.3.26}$$

设 L, l 分别为 $b_n = |a_n - x_0|$ 的上下极限，则

$$0 \leqslant l \leqslant L \leqslant \frac{5}{16} L + \frac{5}{16} L = \frac{5}{8} L \tag{3.3.27}$$

故 $L = l = 0$，因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. □

题目 3.3.6. 设 $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$，对于 $n \geqslant 0$，定义：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1} \end{cases}$$

证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

[分析]: 第一问我们考虑压缩映射. 因为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 结构相似，我们猜测 $x_n - y_n$ 的极限为 0. 对于第二问，我提供了多种不同方向的思路，主要工具就是上下极限.

证明. (1)

首先，$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant 0$. 那么 $x_n,y_n\in[0,1]$ $(\forall n\geqslant 1)$. 当 $n\geqslant 1$ 时，有：

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}-y_{n+1}| &= \left|\frac{1}{x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1}-\frac{1}{2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1}\right| && (3.3.28)\\
&= \left|\frac{x_n^2-y_n^2}{(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}\right| && (3.3.29)\\
&\leqslant \frac{x_n+y_n}{(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2+1)}|x_n-y_n| && (3.3.30)\\
&\leqslant \frac{x_n+y_n}{1+3x_n^2+2x_ny_n+3y_n^2}|x_n-y_n| && (3.3.31)\\
&\leqslant \frac{x_n+y_n}{1+2x_n^2+4x_ny_n+2y_n^2}|x_n-y_n| && (3.3.32)\\
&\leqslant \frac{1}{2}|x_n-y_n| && (3.3.33)\\
& && (3.3.34)
\end{aligned}
$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

(2) 设 L,l 分别为数列 $\{x_n\}$ 的上下极限，那么 $0\leqslant l\leqslant L\leqslant 1$. 由于 $y_n=(y_n-x_n)+x_n$，故

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n=0+L=L\ ,\ \varliminf_{n\to\infty} y_n=0+l=l \tag{3.3.35}$$

下面给出两种方法证明 $\{x_n\}$ 极限存在.

法一（原创）: 我们直接对第一个递推关系式取上下极限，会得到如下结果：

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)}\leqslant\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n^2+\varliminf\limits_{n\to\infty}x_ny_n+2\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n^2+1} && (3.3.36)\\
&\leqslant\frac{1}{l^2+l\cdot l+2l^2+1}=\frac{1}{4l^2+1} && (3.3.37)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2+1)}\geqslant\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n^2+\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_ny_n+2\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n^2+1} && (3.3.38)\\
&\geqslant\frac{1}{L^2+L\cdot L+2L^2+1}=\frac{1}{4L^2+1} && (3.3.39)
\end{aligned}
$$

那么有：

$$
\begin{aligned}
L\leqslant\frac{1}{4l^2+1}\leqslant\frac{1}{4\left(\frac{1}{4L^2+1}\right)^2+1}&\Leftrightarrow(4L^2+1)^2(L-1)+4L\leqslant 0 && (3.3.40)\\
l\geqslant\frac{1}{4L^2+1}\geqslant\frac{1}{4\left(\frac{1}{4l^2+1}\right)^2+1}&\Leftrightarrow(4l^2+1)^2(l-1)+4l\geqslant 0 && (3.3.41)
\end{aligned}
$$

令 $f(x)=(4x^2+1)^2(x-1)+4x$. 下面通过三个分支继续求解：

分支一： 注意到

$$\begin{aligned}(4L^2+1)^2(L-1)+4L &= (4L^2-1+2)^2(L-1)+4L \\ &= (4L^2-1)^2(L-1)+4(4L^2-1)(L-1)+4\,(2L-1) \\ &= (2L-1)\left[(2L-1)(2L+1)^2(L-1)+4(2L+1)(L-1)+4\right] \\ &= (2L-1)\left[(2L-1)(2L+1)^2(L-1)+4L(2L-1)\right] \\ &= (2L-1)^2\left[(2L+1)^2(L-1)+4L\right] \\ &= (2L-1)^2\left[(2L-1+2)^2(L-1)+4L\right] \\ &= (2L-1)^2\left[(2L-1)^2(L-1)+4(2L-1)(L-1)+4(2L-1)\right] \\ &= (2L-1)^3\left[(2L-1)(L-1)+4(L-1)+4\right] \\ &= (2L-1)^3(2L^2+L+1)\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

可知 $x=\frac{1}{2}$ 为 $g(x)=0$ 的唯一实根（三重根），且可看出，$f(x)$ 单调递增，故可得 $L\leq\frac{1}{2}$. 同理 $l\geqslant\frac{1}{2}$，那么只能 $L=l=\frac{1}{2}$，因此 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

分支二： 首先，注意到 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根，且

$$f'(x)=16x(x-1)(4x^2+1)+(4x^2+1)^2+4 \tag{3.3.43}$$

$$f''(x)=16(3x-1)(4x^2+1)+128x^2(x-1) \tag{3.3.44}$$

$$f'''(x)=960x^2-384x+48 \tag{3.3.45}$$

注意到 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f''\left(\frac{1}{2}\right)=0, f'''\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$.

故 $f(x)=(x-1)^3g(x)$，$g(x)$ 为二次多项式，且 $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$. 通过待定系数法或多项式除法，可得 $g(x)=2x^2+x+1$. 剩余步骤和分支一一致.

分支三： 首先，注意到 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个根，且

$$f'(x)=16x(x-1)(4x^2+1)+(4x^2+1)^2+4 \tag{3.3.46}$$

$$f''(x)=16(3x-1)(4x^2+1)+128x^2(x-1) \tag{3.3.47}$$

$$f'''(x)=960x^2-384x+48 \tag{3.3.48}$$

注意到 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$. $\Delta=384^2-4\cdot 960\cdot 48=-36864<0$，因此 $f'''(x)>0$ 恒成立，也即 $f''(x)$ 单调递增. 由于 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$，因此在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，$f''(x)<0$，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增，又由于 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，故 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立. 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，那么

$$f(L)\leqslant 0=f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow L\leqslant\frac{1}{2} \tag{3.3.49}$$

$$f(l)\geqslant 0=f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow l\geqslant\frac{1}{2} \tag{3.3.50}$$

因此 $L=l=\frac{1}{2}$，故 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

分支四：已知等价为：

$$L(4l^2+1) \leqslant 1\ ,\ l(4L^2+1) \geqslant 1 \tag{3.3.51}$$

故

$$L(4l^2+1) \leq l(4L^2+1) \Leftrightarrow (4Ll-1)(L-l) \geq 0 \tag{3.3.52}$$

若 $L \neq l$，则 $4Ll \geqslant 1$，以及 $1 \geqslant L(4l^2+1) = 4Ll \cdot l + L \geqslant L + l$.

因此

$$(L+l)^2 = L^2 + 2Ll + l^2 \leqslant 1 \leqslant 4Ll \Rightarrow (L-l)^2 \leqslant 0 \tag{3.3.53}$$

只能 $L = l$. 最后再考虑 $g(x) = 4x^3 + x - 1, g(l) = g(L) = 0$[3]，易知其单调递增，且 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，则 $L = l = \frac{1}{2}$. 即 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

法二（官方答案）：首先，我们有：

$$(x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 3x_n^2 - x_n y_n - 2y_n^2 = 4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) \tag{3.3.54}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} [4x_n^2 - (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2)] = \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n)(3x_n + 2y_n) = 0 \tag{3.3.55}$$

又由于

$$2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1 = (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) - (y_n^2 - x_n^2) \tag{3.3.56}$$

故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4L^2\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2) = 4l^2 \tag{3.3.57}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4L^2\ ,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} (2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 4l^2 \tag{3.3.58}$$

那么

$$L = \frac{1}{4l^2+1}\ ,\ l = \frac{1}{4L^2+1} \tag{3.3.59}$$

也即 $4L^2 + 1 = \frac{1}{l}, 4l^2 + 1 = \frac{1}{L}$，故

$$l(4L^2+1) = L(4l^2+1) = 1 \tag{3.3.60}$$

若 $L \neq l$，则 $4Ll = 1, L + l = 1$，解得 $L = l = \frac{1}{2}$ 矛盾，因此 $L = l = \frac{1}{2}$，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$. $\square$

[3] 把 $L = l$ 代入上述 (3.3.51) 可得.

注: 方法一不能取等，是因为没有证明

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2)=4L^2\ ,\ \varliminf_{n\to\infty}(x_n^2+x_ny_n+2y_n^2)=4l^2$$
$$\varlimsup_{n\to\infty}(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2)=4L^2\ ,\ \varliminf_{n\to\infty}(2x_n^2+x_ny_n+y_n^2)=4l^2$$

因此只能得到关于上下极限的不等式.

另外，上下极限也有一些无法做的题目，比如定义的数列形如 $x_{n+1}=x_n+o(1)$，其中 $\lim_{n\to\infty}o(1)=0$，对其取上下极限只能得到恒等式，对做题没帮助.

题目 3.3.7. 定义 $x_1=0,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n^2}$，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

解: 事实上，我们有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3.3.61}$$

有时候，虽然上下极限不能直接证明结论得到结果，但却能在中间起辅助作用.

题目 3.3.8. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0\leqslant x_{n+2}\leqslant\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$，求证 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

解: 易得

$$y_{n+1}=2x_{n+2}+x_{n+1}\leqslant 2x_{n+1}+x_n=y_n \tag{3.3.62}$$

由数学归纳法，知 $0\leqslant x_n\leqslant M$($M$ 为一固定的常数). 故 $\{y_n\}$ 单调递减且有界，则收敛，设极限值为 y_0. 设 $\{a_n\}$ 的上、下极限分别为 L,l，又由于 $x_n=y_n-2x_{n+1}$，则：

$$L=\varlimsup_{n\to\infty}(y_n-2x_{n+1})=y_0-2l\ ,\ l=\varliminf_{n\to\infty}(y_n-2x_{n+1})=y_0-2L \tag{3.3.63}$$

解得 $L=l=\frac{y_0}{3}$. 故 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注: 如果我们直接对 y_n 取上、下极限，则只能得到 $y_0=\varlimsup_{n\to\infty}(2x_{n+2}+x_{n+1})\leqslant 2L+L=3L$, $y_0=\varliminf_{n\to\infty}(2x_{n+2}+x_{n+1})\geqslant 2l+l=3l$.

从表面看起来，上下极限比极限要求更弱，因此能通过普通极限去做的题目，一定能使用上下极限做. 反之，由于收敛的充要条件（上下极限相等），虽然能做出来，但可能会比较困难. 上下极限和普通的极限有很大区别，因此有时候的结论可能并不显然，甚至是错误的，因此读者需要严格遵守定理、推论中的公式进行计算，而不是通过自己“臆想”公式去计算.

当然，我们鼓励读者对定理、推论等进行推广证明，尝试发现新的公式.

第 4 章　数项级数

从本章开始，我们将逐步介绍一个新的知识——级数. 事实上，级数的定义并不复杂，你甚至可以认为它是数列部分和的一个推广. 不过在本章，我们讨论更多的内容，包括级数的敛散性判别法，级数和以及部分拓展内容.

4.1　级数的定义

我们给出级数的定义：

定义 4.1.1：　数项级数

设 $a_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 为数列，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4.1.1}$$

称为级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 或 $\sum a_n$.

同数列类似，级数也有收敛和发散一说，即若 (4.1.1) 收敛到一个确定的常数，则称级数 $\sum a_n$ 收敛，否则称级数 $\sum a_n$ 发散.

级数的性质可以用其部分和描述，记 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n$ 为级数 $\sum a_n$ 的部分和数列.

定理 4.1.1：　级数敛散性等价刻画

数列 $\{S_n\}$ 的敛散性和级数 $\sum a_n$ 的敛散性一致，即

$$\text{数列}S_n\text{收敛} \Leftrightarrow \text{级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{收敛}\ ,\ \text{数列}S_n\text{发散} \Leftrightarrow \text{级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{发散} \tag{4.1.2}$$

因此我们可以使用我们之前的一些方法来判断级数 $\sum a_n$ 的敛散性，下面我们推导级数的 Cauchy 收敛准则，来判断级数的敛散性.

定理 4.1.2：　级数收敛的 Cauchy 准则

级数 $\sum a_n$ 收敛的充要条件为：$\forall \varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$，对一切 $p\in N$，有：

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon \tag{4.1.3}$$

证明. 由于数列 $\{S_n\}$ 收敛的充要条件为：$\forall \varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$，对一切 $p\in N$，有：

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon \tag{4.1.4}$$

也即

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

□

题目 4.1.1. 证明**调和级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证明. 我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明，即 $\exists\varepsilon=\frac{1}{2}$, 对 $\forall N>0$，即使 $n>N$，仍 $\exists p=n$，使得

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}=\varepsilon \tag{4.1.5}$$

故调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散（趋于无穷大）. □

对于收敛的级数，我们有以下性质：

定理 4.1.3： 级数收敛的必要条件

级数 $\sum a_n$ 收敛的必要条件是通项趋于 0，即若 $\sum a_n$ 收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{4.1.6}$$

证明. 设 $\sum a_n$ 收敛，其部分和数列 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 也收敛. 故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0 \tag{4.1.7}$$

□

注: 上述定理的逆否命题成立，也即如果 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 或极限不存在，则级数 $\sum a_n$ 发散.

题目 4.1.2. 证明下述级数发散：

(1) $\sum(-1)^n$;

(2) $\sum\frac{2^n}{n}$;

(3) $\sum(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$.

证明. (1) 通项 $(-1)^n$ 极限不存在，故原级数发散；

(2)$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=+\infty$，故发散；

(3)$\sqrt{n}-1\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor\leqslant\sqrt{n}$，故 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 极限也不存在. □

题目 4.1.3. 证明等比级数 $\sum q^n$，在 $|q|<1$ 时收敛，在 $|q|\geqslant 1$ 时发散.

证明. 1^o. 当 $|q|<1, q\neq 0$ 时，易见

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}(n\to\infty) \tag{4.1.8}$$

2^o. 当 $q=0$ 时显然收敛;

3^o. 当 $q=1, q=-1$ 时，原级数发散;

4^o. 当 $|q|>1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \infty(n\to\infty) \tag{4.1.9}$$

发散.

综上，等比级数 $\sum q^n$，在 $|q|<1$ 时收敛，在 $|q|\geqslant 1$ 时发散. □

定理 4.1.4: 级数的若干性质

级数有如下重要的性质：

1. 若 $\sum u_n, \sum v_n$ 收敛，则 $\sum(cu_n+dv_n)$ 也收敛，且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$;
2. 去掉、增加。改变级数的**有限项**，不改变级数的敛散性;
3. 在收敛的级数中任意加括号，不改变级数的**收敛性**和它的和.

注: 1. 两个发散级数进行运算，所得到的级数不一定发散. 例如，取 $c=-d, u_n=v_n=\frac{1}{n}$;

2. 和数列极限类似，但要注意是有限项;

3. 如果是发散级数，则加括号后得到的级数可能收敛也可能发散，但因为对收敛的级数加括号不改变收敛性. 因此如果加完括号后的级数发散，则原级数发散；如果加完括号后的级数收敛，则原级数可能收敛也可能发散.

例如，级数 $\sum(-1)^n$ 发散，但级数 $\sum[(-1)+(1)]=0$ 收敛.

题目 4.1.4. 证明级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$ 发散.

证明. 将奇数项和偶数项加括号，得到新级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots \tag{4.1.10}$$

通项 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$，故原级数发散. □

4.2 正项级数敛散性判别法

定义 4.2.1： 正项级数

我们把通项 $a_n \geqslant 0$ 的级数称为正项级数.

由于通项大于等于 0，因此考虑和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则 S_n 单调递增，因此如果它有上界，则一定有极限，也即级数 $\sum a_n$ 收敛；如果无界，那么原级数就发散.

引理 4.2.1： 正项级数收敛的充要条件

正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 S_n 有界.

证明. 即存在 $M > 0$，使得 $|S_n| < M$. 由于 S_n 单调递增有上界，故收敛，也即原级数收敛；而如果 S_n 无界，则 $S_n \to \infty (n \to \infty)$，故原级数发散. □

4.2.1 比较原则

定理 4.2.1： 比较原则

如果正项级数 $\sum u_n, \sum v_n$，从某项开始有 $u_n \leqslant v_n$，则

1. 若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 收敛；
2. 若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 发散.

证明. 设 $\sum u_n$ 的部分和数列为 S_n，$\sum v_n$ 的部分和数列为 T_n，则

1. 从 N 开始，有

$$S_n \leqslant T_n + R_N \tag{4.2.1}$$

其中 $R_N = |(T_1 + T_2 + \cdots + T_N) - (S_1 + S_2 + \cdots + S_N)|$ 是一个确定，有限的常数. 则 S_n 有界，故级数 $\sum u_n$ 收敛；

2. 由于 $S_n \to \infty$，则 $T_n \to \infty$，故级数 $\sum v_n$ 发散. □

题目 4.2.1. 证明 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$，在 $p \leqslant 1$ 时发散，在 $p > 1$ 时收敛.

证明. 1^o. $p \leqslant 1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$，而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，则 $\frac{1}{n^p}$ 发散；

2^o. $p > 1$ 时，令 $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$，则 $f'(x) = \frac{1-p}{x^p}$，由 Lagrange 中值定理，得

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1-p}{(n+\theta_n)^p} (0 < \theta_n < 1) \tag{4.2.2}$$

因此

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] \tag{4.2.3}$$

故

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \leqslant 1 + \frac{1}{p-1}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right] \tag{4.2.4}$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] \leqslant 1 + \frac{1}{(p-1)2^{p-1}} \tag{4.2.5}$$

有界，故收敛. □

注: p 级数，也称为黎曼 Zeta 函数，即

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{4.2.6}$$

当 $s=2$ 时，就是著名的巴塞尔问题，我们有

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.2.7}$$

推论 4.2.1： 比较原则的极限形式

设 $\sum u_n, \sum v_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \tag{4.2.8}$$

则

1. 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum u_n, \sum v_n$ 同敛散；
2. 若 $l = 0$，则 $\sum v_n$ 收敛时,$\sum u_n$ 也收敛；
3. 若 $l = +\infty$，则 $\sum v_n$ 发散时,$\sum u_n$ 也发散.

只需按照定义，将 (4.2.8) 按照极限的定义展开估计即可，此处不再详细说明.

题目 4.2.2. 判断下列级数的敛散性：

1. $\sum \sin\frac{1}{n}$
2. $\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$
3. $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

解:

1. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1 \tag{4.2.9}$$

故 $\sum\sin\frac{1}{n}$ 发散;

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}}=\pi \tag{4.2.10}$$

故 $\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛;

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1 \tag{4.2.11}$$

故 $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

除了比较原则，我们还有比式判别法，根式判别法，积分判别法，拉贝判别法，我们下面一一讲解.

4.2.2 比式判别法

比式判别法，又称达朗贝尔判别法（d'Alembert 判别法），比值判别法等. 它根据级数的通项的性质，来判断级数的敛散性.

定理 4.2.2: 比式判别法

设 $\sum u_n$ 为**正项级数**，且存在 $N>0$, 以及**确定的**常数 p，满足 $0<q<1$，则:

1. 若对任意的 $n>N$，都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q \tag{4.2.12}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛;

2. 若对任意的 $n>N$，都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1 \tag{4.2.13}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

证明. 1. 不妨设 (4.2.12) 对任意 $n \in N^*$ 成立[1]，那么

$$\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q^{n-1} \tag{4.2.14}$$

因此 $u_n \leqslant u_1 q^{n-1}$，而 $\sum u_1 q^{n-1}$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛.

2. $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \cdots \geqslant u_N$，因此 u_n 不趋于 0，故级数 $\sum u_n$ 发散.

□

注: 这里『确定的』常数 p，指的是它的取值和 n 无关. 如果 p 的取值和 n 有关，则可能得到错误的结果. 例如 $u_n = \frac{1}{n}$，则 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$，但此时 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

但是在实际问题中，我们经常使用下面更为方便的两个推论：

推论 4.2.2： 比式判别法上下极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，则

1. 若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1 \tag{4.2.15}$$

则原级数收敛；

2. 若

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1 \tag{4.2.16}$$

则原级数发散.

特别地，如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 极限存在时，我们能马上得到下述推论：

推论 4.2.3： 比式判别法极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \tag{4.2.17}$$

则

(i) $q < 1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii)$q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

注: 上述两个推论都没有讨论 $q = 1$ 的情况的，实际上当 $q = 1$ 时，级数的敛散性无法判断. 例如

[1] 由于改变级数的有限项不影响敛散性，因此这里可以不妨设.

$\sum \frac{1}{n}$ 发散，$\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛，但却有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \tag{4.2.18}$$

题目 4.2.3. 判断级数 $\sum \frac{n}{2^n}$ 的敛散性.

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \tag{4.2.19}$$

因此原级数收敛.

题目 4.2.4. 判断级数 $\sum \frac{(2n-1)!!}{n!}$ 的敛散性，其中 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$

解： 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1 \tag{4.2.20}$$

因此原级数发散.

题目 4.2.5. 证明：若 $a_n > 0$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \geqslant 0$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

证明. 1^o 当 $q > 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1}} \tag{4.2.21}$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)}{n}\right] = \exp\left[\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = q \tag{4.2.22}$$

2^o 当 $q = 0$ 时，此时

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1} \leqslant \frac{\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{a_1} + a_1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.2.23}$$

□

注： 证明思路和1.2类似.

注： exp 表示指数，即 $\exp(x) = e^x$.

一般情况下，当通项为比式时，我们一般使用比值判别法，这样后一项和前一项就能抵消一部分，以达到简化计算的目的.

通过上述题目，我们引出另一个正项级数的判别法——根式判别法.

4.2.3 根式判别法

首先介绍一下根式判别法的一般形式.

定理 4.2.3： 根式判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在 $N>0$ 及确定的常数 l，

(i) 若对任意 $n>N$，有

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant l < 1 \tag{4.2.24}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 若对任意 $n>N$，有

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1 \tag{4.2.25}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

同理，根式判别法也有上下极限和极限形式，分别阐述如下：

推论 4.2.4： 根式判别法上下极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l \tag{4.2.26}$$

则

(i)$l<1$ 时原级数收敛；

(ii)$l>1$ 时原级数发散.

特别地，如果 $\sqrt[n]{u_n}$ 极限存在时，我们能马上得到下述推论：

推论 4.2.5： 根式判别法极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \tag{4.2.27}$$

则

(i)$l<1$ 时原级数收敛；

(ii)$l>1$ 时原级数发散.

注： 从比值判别法和根式判别法的关系，可以看出能使用比值判别法判断的级数，一定能使用根式判别法判断；但能使用根式判别法判断的级数，则不一定能使用比值判别法判断，说明根式判别法更有效.

题目 4.2.6. 判断级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 的敛散性.

解: 方法一：使用比值判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^n}}{\frac{n!}{10^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = +\infty \tag{4.2.28}$$

故级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

方法二：使用根式判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{10^n}} = \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)!} \tag{4.2.29}$$

下面我们讨论 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ 由 Stirling 公式[2]，知 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$，于是

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{\ln n!}{n}\right) \sim \exp\left[\frac{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}\right)}{n}\right] = \exp\left[\frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \ln n - 1\right] \sim \exp\left(\ln n - 1\right) = \frac{n}{e} \tag{4.2.30}$$

注：上述不能直接对 Stirling 公式两边同时取 n 次方，因为 n 是取极限的自变量，直接取 n 次方可能会出错，所以需要通过指数化规避这个风险.

因此 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$. 故级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

方法三：由 Stirling 公式，知当 $n > 20e$ 时，有

$$\frac{n!}{10^{n-1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}}{10^{n-1}} > \frac{\frac{n^n}{e^n}}{10^n} = \left(\frac{n}{10e}\right)^n > 2^n \tag{4.2.31}$$

但 $\sum 2^n$ 发散，因此级数 $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$ 发散.

题目 4.2.7. 判断级数 $\sum \frac{n^2}{2^n}$ 的敛散性.

解: 事实上，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2} < 1 \tag{4.2.32}$$

故级数 $\sum \frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

4.2.4 积分判别法

由 Riemann 定积分的定义，我们知道级数和积分的联系很密切. 对于 $f(x) \in R[a,b]$，对区间 $[a,b]$ 上任意分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，以及 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的任意点 ξ_k，记 $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$. 如

[2] 参见https://baike.baidu.com/item/%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%9E%97%E5%85%AC%E5%BC%8F/9583086

果有 $\lim_{n\to\infty}\max\Delta_k=0$，则有

$$\lim_{\max\Delta_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta_k=\int_a^b f(x)dx \tag{4.2.33}$$

特别地，我们可以取等距的 ξ_k，甚至是每个区间的端点，也能满足上式. 这启发我们，积分区间也可以等分. 事实上，由积分区间的可加性，我们有

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f(x)dx \tag{4.2.34}$$

这相当于两点的 Lagrange 插值，即 $k=1$ 时 $y=a$；$k-1=n$，即 $k=n+1$ 时，$y=b$，则插值函数为

$$L(x,k)=\frac{k-(n+1)}{1-(n+1)}a+\frac{k-1}{(n+1)-1}b=a+\frac{(k-1)(b-a)}{n} \tag{4.2.35}$$

积分下限即为 $L(x,k)$，上限为 $L(x,k+1)$.

这就引出了积分判别法：

定理 4.2.4

对于 $[N,+\infty)$ 上的 (非负) 减函数 $f(x)$，正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_N^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散.

证明. ($\Rightarrow$) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛, 其和为 S, 则

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$$

又 f 为 $[N,+\infty)$ 上的减函数, 因此 $f(x)\geq 0$, 故条件中 f 非负可以省略。那么 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}f(n)$ 为正项级数, 于是对任意 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_N^{N+m}f(x)dx=\sum_{n=1}^{m}\int_{n+N-1}^{n+N}f(x)dx\leqslant\sum_{n=1}^{m}f(n+N-1)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=S$$

由于 f 单调递减, 因此对任意的 $A>0$, 有

$$0\leqslant\int_N^{N+A-1}f(x)dx\leqslant\int_N^{m+N}f(x)dx\leqslant\sum_{n=1}^{m+1}f(n+N-1)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=S\,,(m<A\leq m+1)$$

由比较原则 (有界) 可知反常积分 $\int_N^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

($\Leftarrow$) 设反常积分

$$\int_N^{+\infty}f(x)dx$$

收敛, 因此

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$$

又 f 为 $[N,+\infty)$ 上的减函数, 因此 $f(x)\geq 0$ 那么 $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ 为正项级数。因此, 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 有

$$\sum_{n=N+1}^{m} f(n) \leqslant \int_{N}^{m} f(x)dx \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(x)dx \leqslant M$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. □

注: 由于改变级数的有限项，不影响级数的敛散性，因此我们可以从 N 开始讨论.

题目 4.2.8. 讨论 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解: 只需判断 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性即可.

(1) 当 $p>1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_1^{+\infty} x^{-p}dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p} \tag{4.2.36}$$

收敛，故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛.

(2) 当 $p=1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty \tag{4.2.37}$$

发散，故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散.

(2) 当 $p<1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \int_1^{+\infty} x^{-p}dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{+\infty} = +\infty \tag{4.2.38}$$

发散，故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散.

故 p 级数，当 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散.

题目 4.2.9. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 的敛散性.

解: 考虑反常积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln x|_2^{+\infty} = +\infty \tag{4.2.39}$$

故原级数发散.

同理可证 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)}$ 发散.

4.2.5 拉贝判别法

对于极限形式的级数敛散性判别法，我们无法判断极限为 1 的情况. 前面所提及的判别法，比值判别法和根式判别法，它们其实以等比级数为比较对象. 但有时候级数收敛，但收敛速度慢于等比级数，

此时这两种判别法就无法使用了. 为此，我们需要修改比较的对象，让收敛速度慢“一点点”. 从直观上来看，等比级数的收敛速度是非常快的，因此我们自然会想找一个收敛速度稍微慢一点的级数. p 级数刚好满足这一要求，因此我们有下面的拉贝（Raabe）判别法：

定理 4.2.5： 拉贝判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在 $N > 0$ 以及**常数** r，

(i) 若对任意 $n > N$，有

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant r > 1 \tag{4.2.40}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 若对任意 $n > N$，有

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 1 \tag{4.2.41}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

类似地，拉贝判别法也有极限形式

推论 4.2.6： 拉贝判别法极限形式

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = r \tag{4.2.42}$$

(i) 当 $r > 1$ 时，原级数收敛；

(ii) 当 $r < 1$ 时，原级数发散.

注: 这里要注意，此时 $r > 1$ 收敛，$r < 1$ 发散，和前面判别法刚好相反.

注: 至于上下极限的形式，读者可以仿照之前的推论写出来：

1. 若 $\underline{\lim}_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$，则 $\sum u_n$ 收敛；
2. 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1$，则 $\sum u_n$ 发散；

题目 4.2.10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)}$ 的敛散性.

解: $u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)}$，那么有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)(x+n+1)} = \frac{n+1}{x+n+1} \to 1(n\to\infty) \tag{4.2.43}$$

因此比值判别法和根式判别法失效[3]. 使用 Raabe 判别法，我们有

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\frac{n}{x+n+1}x\to x(n\to\infty) \tag{4.2.44}$$

因此，$x>1$ 时原级数收敛，$x<1$ 时原级数发散，$x=1$ 时原级数为调和级数（缺第一项）发散.

综上，$x>1$ 时原级数收敛，$x\leqslant 1$ 时原级数发散.

事实上，Raabe 判别法 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 等价于 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$，请读者自行证明.

4.3 正项级数敛散性判别法（拓展）

我们之前讨论过，所谓级数敛散性判别法，实际上是在和已知敛散性的级数进行比较，根据被比较级数的不同，我们可以得到不同的判别法. 由于不存在收敛速度**最快**的级数，因此我们无法找到一种完美的级数敛散性判别法，也即难以解决 $r=1$ 的情况. 下面，我们将介绍一些其它的级数敛散性判别方法，它们通过比较不同的收敛级数，得到了不同的判别法.

4.3.1 对数判别法

首先，我们先看一道题.

题目 4.3.1. 若极限 $\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r$，则极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ 存在，且取值相等.

证明.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}\overset{Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1+1\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{4.3.1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r \tag{4.3.2}$$

□

但是反过来，由于 Stolz 逆定理不一定成立，所以上述步骤的推导不一定可逆，也就是说，使用 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ 判别比 $\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r$ 更有效. 因为前者能够判断时，后者一定能判断，但后者能判断时，前者不一定能判断.

通过这个证明，就引出了对数判别法.

[3] 这里不要认为 $x>0$ 时，$\frac{n+1}{x+n+1}<1$ 就能使用比值判别法，此时无法找到一个确定的 r，使得 $r<1$ 严格成立. 特别地，$x=1$ 时，原级数发散

定理 4.3.1： 对数判别法

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=q \tag{4.3.3}$$

(i) 当 $q>1$ 时，原级数收敛；

(ii) 当 $q<1$ 时，原级数发散.

题目 4.3.2. 讨论 p 级数的敛散性.

解: 即讨论 $\sum\frac{1}{n^p}$ 的敛散性，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p\ln n}{\ln n}=p \tag{4.3.4}$$

因此 $p>1$ 时原级数收敛，$p<1$ 时原级数发散. 又 $p=1$ 时为调和级数，故发散.

综上，$p\leqslant 1$ 时原级数发散，$p>1$ 时原级数收敛.

题目 4.3.3. 判断 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)\ln\ln n}{\ln n}=+\infty \tag{4.3.5}$$

故原级数发散.

4.3.2 Bertrand 判别法

定理 4.3.2

设 $\sum a_n$ 为正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]=\mathcal{B} \tag{4.3.6}$$

(1) 若 $\mathcal{B}>1$，则 $\sum a_n$ 收敛；

(2) 若 $\mathcal{B}<1$，则 $\sum a_n$ 发散.

题目 4.3.4. 判断级数 $\sum\frac{1}{n\ln^2 n}$ 的敛散性.

解:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(1-\frac{n\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right)-1\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\frac{(n+1)\ln^2(n+1)-n\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right)-1\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[\frac{n(n+1)\ln^2(n+1)-n^2\ln^2 n-(n+1)\ln^2(n+1)}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n^2+n)-\ln^2(n+1)}{n\ln n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)+\ln n}{\ln n}=2
\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

注: 如果使用对数判别法，则会得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+2\ln\ln n}{\ln n}=1$$

无法判断.

题目 4.3.5. 若 $\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]=\mathcal{B}$，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=1$.

证明. 使用4.3.3(题目 4.3.6) 的结果 $\ln a_n=-\ln n-\mathcal{B}\ln\ln n+o(\ln\ln n)$.

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=1\tag{4.3.8}$$

□

注: 这说明无论能否可以使用 Bertrand 判别法 ($\mathcal{B}=1$ or not)，只要上述极限存在，我们都无法使用对数判别法去判断.

4.3.3 第二对数判别法

在讲这个判别法之前，先看一道题目:

题目 4.3.6. 若 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]=\mathcal{B}$, 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/na_n)}{\ln\ln n}=\mathcal{B}$.

证明. 法一（deepseek）: 令 $x_n=n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 以及 $\lim_{n\to\infty}x_n\ln n=\mathcal{B}$. 则 $x_n=\frac{\mathcal{B}+o(1)}{\ln n}$, $1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+x_n}{n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1+x_n}{n}$.

那么

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ln\left(1-\frac{1+x_n}{n}\right)=-\frac{1+x_n}{n}-\frac{(1+x_n)^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\tag{4.3.9}$$

所以

$$\ln a_n - \ln a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+x_k}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1+x_n)^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.3.10}$$

由于第二项求和收敛，故可把第二项和余项记为 $C + o(1)$, 也即 $\ln a_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+x_k}{k} + C + o(1)$.

由于 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, 以及 $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + C' + o(1)$. 那么

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{x_k}{k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\mathcal{B} + o(1)}{k\ln k} = \mathcal{B}\ln\ln n + o(\ln\ln n) \tag{4.3.11}$$

因此

$$\ln a_n = -\ln n - \gamma + o(1) - \mathcal{B}\ln\ln n + o(\ln\ln n) = -\ln n - \mathcal{B}\ln\ln n + o(\ln\ln n) \tag{4.3.12}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/na_n)}{\ln\ln n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln a_n}{\ln\ln n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln n - \mathcal{B}\ln\ln n + o(\ln\ln n)}{\ln\ln n} = \mathcal{B} \tag{4.3.13}$$

法二（原创）： 前两步类似，但不用展开这么高项. 令 $x_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. 以及 $\lim_{n\to\infty} x_n \ln n = \mathcal{B}$. 则 $x_n = \frac{\mathcal{B}+o(1)}{\ln n}$, $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+x_n}{n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1+x_n}{n}$.

那么

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+x_n}{n}\right) = -\frac{1+x_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/na_n)}{\ln\ln n} &= -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)}{\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 + 1\right)} = -\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1+x_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln n\left[x_n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} x_n\ln n + \lim_{n\to\infty} O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

□

定理 4.3.3： 第二对数判别法

设 $\sum a_n$ 为正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/na_n)}{\ln\ln n}=q \tag{4.3.15}$$

(i) 当 $q>1$ 时，原级数收敛；

(ii) 当 $q<1$ 时，原级数发散.

第二对数判别法能够解决一些对数判别法无法解决的问题，但是解决的问题仍有限.

4.3.4 Kummer 判别法

Kummer 判别法是一簇判别法，根据 Kummer 判别法我们可以推导出我们已经学过的几个判别法.

定理 4.3.4： Kummer 判别法

设正项级数 $\sum \frac{1}{c_n}$ 发散，对于正项级数 $\sum a_n$，作

$$\mathcal{K}_n=c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}$$

则

(1) 存在 $N>0,\delta>0$，当 $n>N$ 时，满足 $\mathcal{K}_n\geqslant\delta$，则 $\sum a_n$ 收敛;

(2) 对于任意 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $\mathcal{K}_n\leqslant 0$，则 $\sum a_n$ 发散.

注: 这里的 δ 也是『确定的』常数.

注: 对 $\mathcal{K}_n$ 取极限即可得到极限形式的 Kummer 判别法.

如果我们取 $c_n=1$，那么 $\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}-1$，这就是比式判别法;

如果我们取 $c_n=n$，那么 $\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1$，这就是 Rabbe 判别法;

如果我们取 $c_n=n\ln n$，那么 $\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_n=\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-1$，这就是 Bertrand 判别法.

因此我们可以找一些收敛速度更慢一点的级数，使得加强上述判别法. 例如我们可以取 $c_n=n\ln n\ln\ln n$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_n=\lim_{n\to\infty}\ln\ln n\left\{\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right\}-1$$

证明. 令 $c_n=n\ln n\ln\ln n$ 代入，得

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n&=n\ln n\ln\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)\\&=n\ln n\ln\ln n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)+n\ln n\ln\ln n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln n \ln\ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] - (n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1) + n\ln n\ln\ln n \\
&+ \ln n\ln\ln n \\
&= \ln\ln n\left\{\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right\} - (n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1) \\
&+ n\ln n\ln\ln n + \ln n\ln\ln n + \ln\ln n
\end{aligned}
$$

现在处理后面一堆东西，由于

$$
\begin{aligned}
&-(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1) + n\ln n\ln\ln n + \ln n\ln\ln n + \ln\ln n \\
&= -(n+1)\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\ln\ln(n+1) + n\ln n\ln\ln n + \ln n\ln\ln n + \ln\ln n \\
&= -(n+1)\ln n\left(\ln\ln(n+1) - \ln\ln n\right) - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\ln(n+1) + \ln\ln n
\end{aligned}
\tag{4.3.16}
$$

考虑第一项，n 趋于无穷时，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} -(n+1)\ln n\left(\ln\ln(n+1)-\ln\ln n\right) = -\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1+1\right) \\
&= -\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1
\end{aligned}
\tag{4.3.17}
$$

对于后两项，n 趋于无穷时，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\ln(n+1)+\ln\ln n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-(n+1)\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln\ln(n+1)+\ln\ln n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{-\ln\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1+1\right] - \left[O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\right]\ln\ln(n+1)\right\} \\
&= -\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.3.18}
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_n = \lim_{n\to\infty}\ln\ln n\left\{\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-1\right\}-1 \tag{4.3.19}
$$

□

但即使如此，Kummer 判别法也不是最完美的判别法，正如我之前所说的，正项级数判别法没有完美的答案，正项级数判别法的本质就是比较原则，根据被比较级数的不同，可以构造出无数个不同的判别法.

正项级数的判别法还有很多，我就不一一列举了，读者可以阅读https://zhuanlan.zhihu.com/p/390327683以及https://zhuanlan.zhihu.com/p/390881621了解更多的判别法，可以阅读https://zhuanlan.zhihu.com/p/1941975976868320546来了解不同判别法的来源及核心.

4.4 一般项级数敛散性判别法

我们前面所讨论的这么多判别法，都是正项级数（即通项 $a_n \geqslant 0$ 的级数）的判别法. 但是在实际中，并不是所有的级数都满足这种性质. 对于一般情况，级数的通项可能有正（包含 0)，也可能有负的情况，我们称这样的级数为**一般项级数**. 换句话说，一般项级数就是我们不对数项级数的通项做任何要求的级数.

4.4.1 交错级数

对于一般项级数，我们有一类的级数，称为交错级数，它是形如 $\sum(-1)^n u_n$, 其中 $u_n > 0$ 的形式. 对于交错级数，我们有下述 Leibniz 判别法.

定理 4.4.1： 交错级数

对于交错级数 $\sum(-1)^n u_n$,$u_n > 0$. 若 $\{u_n\}$ 满足

$$u_n \swarrow\to 0 (n \to \infty) \tag{4.4.1}$$

[a] 则交错级数 $\sum(-1)^n u_n$ 收敛.

[a]也即数列 u_n 单调递减趋于 0.

证明. 考察原级数前 $2n+1$ 项的部分和 S_{2n+1}.

$$S_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1} \tag{4.4.2}$$

由于 u_n 单调递减，故括号内的部分大于等于 0，故 $S_{2n+1} \leqslant u_0$.

又有

$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2n} - u_{2n+1}) \tag{4.4.3}$$

括号内的部分大于等于 0,故 S_{2n+1} 单调递增. 因此 $\{S_{2n+1}\}$ 单调递增有上界,故收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = s$，则 $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s$. 那么可以得到 $\lim_{n\to\infty} S_n = s$. □

题目 4.4.1. 判断级数 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 的敛散性.

解: $u_n = \frac{1}{n}$，单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知原级数收敛.

4.4.2 绝对收敛和条件收敛

读者可能会发现，调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，但变成交错级数 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 就收敛了，那么有相关或类似性质的级数是否值得单独讨论呢？事实上，这在级数范畴内还是很常用的（即讨论通项加了绝对值的级数和未加绝对值的级数的敛散性)，也有单独的定义和较好的性质，我们下面详细叙述.

对于一般项级数 $\sum u_n$，如果级数 $\sum u_n$ 收敛，但级数 $\sum |u_n|$ 发散，我们称它**条件收敛**；如果级数 $\sum |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum u_n$ 绝对收敛. 我们很容易通过 Cauchy 收敛准则证明下面很常用的结论：

定理 4.4.2： 绝对收敛与条件收敛的关系

绝对收敛的级数一定收敛.

证明. 由于 $\sum |u_n|$ 收敛，则对任意的 $n > N, p \in N^*$，有

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{u_n+p}| < \varepsilon \tag{4.4.4}$$

但

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{u_n+p}| < \varepsilon \tag{4.4.5}$$

故 $\sum u_n$ 收敛. □

注: 上述定理说明，如果要证明某个一般项级数收敛，只需证明通项加了绝对值的级数收敛即可. 但一般情况下，这种方法是不现实的，因为加了绝对值可能会破坏原来级数的性质，导致收敛的级数通项加完绝对值后变为发散的级数（即无法通过这种方法判断条件收敛的级数）.

题目 4.4.2. 判断下列级数哪些是条件收敛，绝对收敛或发散的：

(1)$\sum \frac{\sin n}{n^2}$; (2)$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$;

(3)$\sum (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$; (4)$\sum (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

解:

1. 由于 $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$，故原级数绝对收敛；
2. 原级数条件收敛，因为不加绝对值的级数收敛，但加上绝对值的级数发散；
3. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ 单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知原级数收敛，但对于加上绝对值的级数，我们有
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} \tag{4.4.6}$$
故加上绝对值的级数发散，因此原级数条件收敛.
4. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ 单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知原级数收敛. 对于加上绝对值的级数，我们有
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{(n+1)^2} \tag{4.4.7}$$
故加上绝对值的级数收敛，因此原级数绝对收敛.

对于绝对收敛的级数，我们有下述两个较好的性质：

一、级数的重排不改变绝对收敛性及级数和

所谓级数重排，就是建立一个下标集合 N 到自己的一一映射，然后按照 $n \to f(n)$ 的规则，生成一个新的级数 $\sum u_{f(n)}$，记 $v_n = \sum u_{f(n)}$. 换句话说，级数的重排就是对原级数任意两项进行若干次对换（有限次或可数次）得到的一个新的级数. 那么我们得到的新的级数 $\sum u_{f(n)}$ 也绝对收敛，并且级数求和和之前的结果一样.

证明. **我们先证明前半部分**.

假设 $u_n, u_{f(n)} \geqslant 0$(即假设两个级数都是正项级数，这是因为我们要证明绝对收敛，和证明正项级数是收敛是等价的).

考虑部分和数列 S_n 为重排前的级数的部分和，则 $S_n \to S(n \to \infty)$，T_m 为重排后的级数的部分和. 由于 f 为一一映射，因此对任意 $1 \leqslant k \leqslant m$，都存在 $f^{-1}(k) \in N^*$. 因此我们可以取 $n = \max\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \cdots, f^{-1}(m)\} \geqslant m$（抽屉原理），那么

$$\{u_{f^{-1}(1)}, u_{f^{-1}(2)}, \cdots, u_{f^{-1}(m)}\} \subset \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \tag{4.4.8}$$

这是因为 n 的取值为它们下标的最大值，因此左边的下标一点小于等于 n，那么每个元素也一定属于右边的集合，且元素总个数小于等于右边的几乎.

那么我们可以得到 $T_m \leqslant S_n$. 对 n 取极限，则 $T_m \leqslant S$. 故 T_m 收敛，设为 T.

因此 $T \leqslant S$，同理可以把原级数看出重拍后的级数的重排，因此 $T \geqslant S$，故 $T = S$. □

定理后半部分说的是绝对收敛的一般项级数和它的重排级数的级数和结果一致（注意此时不一定是正项级数）. 对于定理的后半部分证明，我们考虑使用定理的前半部分，构造出来两个正项级数，那么即使重排，其和也不变. 因此我们考虑，是否存在这样的两个正项级数 $\sum p_n$ 和 $\sum q_n$，使得 $\sum u_n = \sum p_n - \sum q_n$，以及重排后的级数 $\sum u'_n = \sum p'_n - \sum q'_n$.

事实上，这是可行的. 我们可以这样设计，首先假设 $u_n = p_n - q_n$，且 $u_n > 0$ 时，$q_n = 0$；$u_n < 0$ 时，$p_n = 0$. 我们发现 $p_n + q_n = |u_n|$. 也即下面两个方程：

$$\begin{cases} |u_n| & = p_n + q_n \\ u_n & = p_n - q_n \end{cases} \tag{4.4.9}$$

那么 $u_n \geqslant 0$ 时，$p_n = u_n \geqslant 0, q_n = 0$; $u_n < 0$ 时，$p_n = 0$，$q_n = -u_n > 0$.

下面进行证明定理后半部分.

证明. 取

$$p_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}\ ,\ q_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} \tag{4.4.10}$$

那么 $u_n \geqslant 0$ 时，$p_n = u_n, q_n = 0; u_n < 0$ 时，$p_n = 0, q_n = -u_n > 0$.

由于 $\sum u_n$ 绝对收敛，因此 $\sum p_n, \sum q_n$ 均收敛. 且 $S = \sum u_n = \sum p_n - \sum q_n$.

同理，对于重排后的级数，可以得到 $\sum v_n = \sum p_n' - \sum q_n'$. 但 $\sum p_n'$ 为 $\sum p_n$ 的重排，$\sum q_n'$ 为 $\sum q_n$ 的重排. 因此级数和相等，即 $\sum p_n' = \sum p_n, \sum q_n' = \sum q_n$. 故

$$T = \sum v_n = \sum p_n' - \sum q_n' = \sum p_n - \sum q_n = \sum u_n = S \tag{4.4.11}$$

证毕. □

二、两个级数通项乘积级数绝对收敛且有相同的级数和

对于两个级数 $\sum u_n$，$\sum v_n$，若它们绝对收敛，令 $w_{ij} = u_i v_j$，则级数 $\sum_{i,j} w_{ij}$ 绝对收敛. 我们可以把 $\sum_{i,j} w_{ij}$ 看成某些级数特殊的重排，例如我们可以按对角线规则进行求和，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i+j=n} u_i v_j \quad \text{or} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_n + \sum_{j=1}^{n-1} u_n v_j\right) \quad \text{or} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n+1}^{2n} u_i v_j - \sum_{i+j=n+1}^{2n-2} u_i v_j\right) \tag{4.4.12}$$

其中第一个式子按照对角线规则，从右上角到左下角这根线，穿到的项求和累加；第二个式子按照正方形回路规则；第三个式子和第一个式子等价，不过它表示的意思是，先按照正方形规则，然后每一组下标的范围是 $n+1 \sim 2n$，然后求和再减去一次重复的求和下标 $n+1 \sim 2n-2$，相同项抵消后，发现它等于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i+j=2n-1}^{2n} u_i v_j$ 和第一个式子等价（不过这个简化的式子也可以理解成一组一组，即对角线第一第二为一组，第三第四为一组，然后一组一组求和）.

上述的意思是，按照某一种方式，把下面级数求和.

$$\begin{array}{cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \tag{4.4.13}$$

这个定理的主要用处在计算某些级数时，通过组合，改变计算方式，使得大幅简化计算.

我们可以看一个例子.

首先，$\sum r^n, |r| < 1$ 绝对收敛，且

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots \tag{4.4.14}$$

那么

$$\frac{1}{(1-r)^2} = \left(\sum r^n\right)\left(\sum r^n\right) = 1 + (r+r) + (r^2+r^2+r^2) + \cdots + (r^n + \cdots + r^n) + \cdots \tag{4.4.15}$$

$$= 1 + 2r + 3r^3 + \cdots + (n+1)r^n + \cdots = \sum (n+1)r^n \tag{4.4.16}$$

我们得到了上述级数的另一个表达. 其中，最后一步使用了对角线求和.

4.4.3 Abel-Dirichlet 判别法

首先我们将一下 **Abel 变换**，它不仅在一般项级数判别法中很有用，而且在级数求和，极限等部分也有很有用. Abel 变换把乘积型的数列部分和，变为一个差分数列和一个部分和数列的乘积再求和，可能形式上会变得更复杂，但在某些特定结构的数列上，反而可能大幅简化结构.

定理 4.4.3： Abel 变换

对于两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，令 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的部分和数列，那么

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n S_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)S_k \tag{4.4.17}$$

若记 $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$，则上式可简化为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n S_n - \sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_{k+1} S_k \tag{4.4.18}$$

证明. 我们证右式等于左式即可.

$$\begin{aligned}
a_n S_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)S_k &= a_n S_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}S_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_k S_k = a_n S_n - \sum_{k=2}^{n} a_k S_{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k S_k \\
&= a_n S_n - \sum_{k=2}^{n-1} a_k S_{k-1} + \sum_{k=2}^{n-1} a_k S_k + a_1 b_1 - a_n S_{n-1} \\
&= a_n b_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k (S_k - S_{k-1}) + a_1 b_1 \\
&= a_n b_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_k + a_1 b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k
\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

□

题目 4.4.3. 求数列 $\{n^2 r^n\}$ 的部分和数列 T_n，其中 $0<r<1$.

解:

$$\begin{aligned}
T_n &= n^2 \cdot \frac{r(1-r^n)}{1-r} - \sum_{k=1}^{n-1}[(k+1)^2-k^2]\cdot\frac{r(1-r^k)}{1-r} \\
&= n^2 \cdot \frac{r(1-r^n)}{1-r} - \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{r(1-r^k)}{1-r} \\
&= n^2 \cdot \frac{r(1-r^n)}{1-r} - \frac{r}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) + \frac{r}{1-r}\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)r^k
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

又因为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2-1 \tag{4.4.21}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)r^k &= (2n-1)\frac{r(1-r^{n-1})}{1-r}-2\sum_{i=1}^{n-2}\frac{r(1-r^i)}{1-r}\\ &= \frac{r}{1-r}\left[(2n-1)(1-r^{n-1})-2\sum_{i=1}^{n-2}(1-r^i)\right]\\ &= \frac{r}{1-r}\left[(2n-1)(1-r^{n-1})-(2n-4)+\frac{2r(1-r^{n-2})}{1-r}\right]\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

那么

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{r}{1-r}\left\{n^2-n^2r^n-n^2+1+\frac{r}{1-r}\left[(2n-1)(1-r^{n-1})-(2n-4)+\frac{2r(1-r^{n-2})}{1-r}\right]\right\}\\ &= \frac{r}{1-r}(1-n^2r^n)+\left(\frac{r}{1-r}\right)^2[3-(2n-1)r^{n-1}]+2\left(\frac{r}{1-r}\right)^3(1-r^{n-2})\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

又 $n=1$，代入得 $r+2\left(\frac{r}{1-r}\right)^2+2\left(\frac{r}{1-r}\right)^3\cdot\frac{r-1}{r}=r$.

又 $n=2$，代入得 $\frac{r}{1-r}(1-4r^2)+3\frac{r^2}{1-r}=\frac{r+3r^2-4r^3}{1-r}=\frac{r-r^2+4r^2-4r^3}{1-r}=r+4r^2$.

因此上述的 T_n 是良定义的，也即 $n\geqslant 1$ 的正整数都成立.

注: 注意，$n=0$ 代入得到 $-\frac{2}{1-r}$.

由 Abel 变换可以推出一般项级数的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

我们首先证明 Abel 引理，即

引理 4.4.1： Abel 引理

设数列 $\{a_n\}$ 单调，且数列 $\{b_n\}$ 的部分和数列 S_n 有界，即 $|S_n|<l$. 记 $M=\max_{k\leqslant n}\{|a_k|\}$. 那么我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|<3Ml \tag{4.4.24}$$

证明. 由于 $a_{k+1}-a_k$ 同号，故放缩后可相互抵消，即

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|=\left|a_nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)S_k\right|\leqslant Ml+\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)S_k\right| \tag{4.4.25}$$

$$\leqslant Ml+|a_n-a_1|l<3Ml \tag{4.4.26}$$

□

下面叙述 Abel 判别法.

定理 4.4.4： Abel 判别法

对于级数 $\sum a_nb_n$，若

(1)a_n 单调且有界；

(2) 级数 $\sum b_n$ 收敛.

则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

证明. 由于 $\sum b_n$ 收敛，由柯西收敛准则，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，对于任意 $n>N,p\in N^*$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right|<\varepsilon \tag{4.4.27}$$

而数列 $\{a_n\}$ 单调有界，因此存在 $M>0$，使得 $|a_n|<M$. 因此

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_kb_k\right|<3M\varepsilon \tag{4.4.28}$$

由柯西收敛准则知级数 $\sum a_nb_n$ 收敛. □

下面叙述 Dirichlet 判别法.

定理 4.4.5： Dirichlet 判别法

对于级数 $\sum a_nb_n$，若

(1)a_n 单调趋于 0；

(2) 级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界.

则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

证明. 由于级数 $\sum a_nb_n$ 收敛，则 $|S_n|<M$. 又 a_n 单调趋于 0，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，对于任意 $n>N,p\in N^*$，有 $|a_n|<\varepsilon$. 故

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_kb_k\right|<3M\varepsilon \tag{4.4.29}$$

由柯西收敛准则知级数 $\sum a_nb_n$ 收敛. □

注: 使用 Abel 引理时，无需必须确定为从 $k=1$ 到 n 求和. 事实上，我们从证明过程可以看出，求和绝对值的上界和求和区间无直接关系，而是和在该区间上 $|a_n|$ 和 $|S_n|$ 的上界有关.

Abel 判别法和 Dirichlet 判别法统称为 A-D 判别法，因为从定理的叙述，我们可以看到它们的相似之处. 它们分别对一个级数的通项 a_n 和级数 $\sum b_n$ 作要求，一个要求通项单调有界且级数收敛，一个要求通项单调趋于 0 且级数部分和有界. 这两个要求，一个强一点，那么另一个要求就可以弱一点.

从 A-D 判别法，我们可以马上推出 Leibniz 判别法.

题目 4.4.4. 使用 Dirichlet 判别法推出 Leibniz 判别法.

证明. 由于 $\sum u_n$ 单调递减趋于 0，而 $\sum(-1)^n$ 部分和有界，故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum(-1)^n u_n$ 收敛. □

题目 4.4.5. 判断下列级数的敛散性：
(1)$\sum(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$
(2)$\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$

解: (1)$\sum(-1)^n$ 部分和有界，$\frac{1}{2^n}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原级数收敛；
(2)$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

4.4.4 $\sum\sin kx$ 和 $\sum\cos kx$

我们下面求 $\sum\sin kx$ 和 $\sum\cos kx$ 的部分和数列 $S_n=\sum_{k=1}^n\sin kx$，$T_n=\sum_{k=1}^n\cos kx$.
法一：

$$S_n=\sum_{k=1}^n\sin kx=\frac{\sum_{k=1}^n 2\sin kx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=-\frac{\sum_{k=1}^n\left[\cos\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\cos\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{4.4.30}$$

$$=-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{4.4.31}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^n\cos kx=\frac{\sum_{k=1}^n 2\cos kx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sum_{k=1}^n\left[\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{4.4.32}$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{4.4.33}$$

注: 上述证明运用了积化和差公式：

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.4.34}$$

法二：
由欧拉公式 $e^{ix}=i\sin x+\cos x$，知

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \tag{4.4.35}$$

因此

$$S_n=\sum_{k=1}^n\sin kx=\sum_{k=1}^n\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}-\sum_{k=1}^n e^{-ikx}\right) \tag{4.4.36}$$

$$
\begin{align}
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}} - \frac{e^{-ix}(1-e^{-inx})}{1-e^{-ix}}\right) \tag{4.4.37}\\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}} - \left[e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}+e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right]}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} \tag{4.4.38}\\
&= \frac{2}{2i}\cdot\frac{\frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}}{2} - \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}+e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{2}}{2i\cdot\frac{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}{2i}} \tag{4.4.39}\\
&= -\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{4.4.40}
\end{align}
$$

以及

$$
\begin{align}
T_n = \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}+\sum_{k=1}^{n}e^{-ikx}\right) \tag{4.4.41}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}} + \frac{e^{-ix}(1-e^{-inx})}{1-e^{-ix}}\right) \tag{4.4.42}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}} - \left[e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right]}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} \tag{4.4.43}\\
&= \frac{2i}{2}\cdot\frac{\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} - \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{2i}}{2i\cdot\frac{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}{2i}} \tag{4.4.44}\\
&= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{4.4.45}
\end{align}
$$

因此当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$\sin\frac{x}{2}\neq 0$，那么 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$，$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ 均有界（对于一个确定的 x 而言）.

题目 4.4.6. 判断级数 $\sum\frac{\sin nx}{n}$ 和 $\sum\frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解: 由于 $\sum\sin nx$ 和 $\sum\cos nx$ 部分和有界，$\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0，因此由 Dirichlet 判别法知，这两个级数都收敛.

题目 4.4.7. 判断级数 $\sum\frac{\sin^2 nx}{n}$ 和 $\sum\frac{\cos^2 nx}{n}$ 的敛散性.

解: 由于 $\sin^2 nx=\frac{1-\cos 2nx}{2}$，$\cos^2 nx=\frac{1+\cos 2nx}{2}$. 而级数 $\sum\frac{\sin 2nx}{n}$ 和 $\sum\frac{\cos 2nx}{n}$ 收敛，但 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，因此原级数发散.

注: 对收敛的级数任意加括号，不改变其敛散性；如果加括号后的级数发散，那么原级数一定发散. 因此上述例题就是使用了定理的后半句.

注意，在不知道级数的敛散性的前提下，我们不能随便加括号. 上例是由于加括号后级数发散了，才能判断它发散. 但是对于收敛的级数我们一般不这样做，因为在改变括号前，它既可能是收敛的，也可能是发散的.

题目 4.4.8. 判断级数 $\sum(-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$ 的敛散性.

解: 首先，$\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0，因此我们只需要级数 $\sum(-1)^n \cos^2 n$ 部分和有界即可.

由于

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^n \cos^2 n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^n \frac{1+\cos 2n}{2}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^n \frac{1}{2}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^n \frac{\cos 2n}{2}\right| \tag{4.4.46}$$

因此级数 $\sum(-1)^n \cos^2 n$ 部分和有界，原级数 $\sum(-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$ 收敛.

4.4.5 一类含有 $(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 的级数

首先，先不加证明地引入一个定理：

定理 4.4.6

若 $a_n \to 0(n \to \infty)$ 且对级数 $\sum a_n$ 加括号后得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且满足下述条件之一：

1. 存在 $M > 0$，使得每个括号内项数不超过 M;
2. 每个括号内各项符号相同
3. 在每个括号内，任意截断误差对组内求和下标一致收敛于 0.

则级数 $\sum a_n$ 收敛，且与 $\sum b_n$ 收敛到同一值.

注: 这里括号内各项符号相同指的是在加完括号后，对于同一个括号，括号内各项的符号是一致的.

证明. 设从第一项开始到每个括号的最后一个元素，分别有 $N_1, N_2, \cdots, N_n, \cdots$ 项，则 $b_n = a_{N_{n-1}+1} + a_{N_{n-1}+2} + \cdots + a_{N_n}$.

1. 如果每个括号内都是有限项，设 b_n 的前 n 项和为 $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_n}$. 设 a_n 的前 m 项和为 $T_m = \sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$，则必存在 $N_i \leqslant m < N_{i+1}$，则

$$T_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = S_i + \sum_{k=N_i+1}^{m} a_k \tag{4.4.47}$$

设 $S_n \to L(n \to \infty)$. 令 $m \to \infty$，则 $i \to \infty$，因此

$$|T_m - L| = \left|S_i - L + \sum_{k=N_i+1}^{m} a_k\right| \leqslant |S_i - L| + M\varepsilon < (M+1)\varepsilon \tag{4.4.48}$$

也即 $T_m \to L, m \to \infty$，故级数 $\sum a_n$ 收敛.

2. 如果括号内的各项同号，仿照第一种情况的证明方法，有

$$|T_m - L| = \left|S_i - L + \sum_{k=N_i+1}^{m} a_k\right| \leqslant |S_i - L| + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} |a_k| = |S_i - L| + |b_i| \tag{4.4.49}$$

令 $m \to \infty$，则 $i \to \infty$，此时 $|b_i| \to 0$，也即

$$|T_m - L| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{4.4.50}$$

也即 $T_m \to L, m \to \infty$，故级数 $\sum a_n$ 收敛.

3. 条件等价描述为：存在 M_k，且 $\lim_{n\to\infty} M_k = 0$，使得对每个 k 以及任意的 $1 \leqslant p \leqslant N_k - N_{k-1}$，都有

$$-M_k \leqslant R_k(p) = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_{k-1}+p} a_n \leqslant M_k \tag{4.4.51}$$

同上，我们有 $N_i \leqslant m = N_i + p < N_{i+1}$，以及

$$|T_m - L| = \left| S_i - L + \sum_{k=N_i+1}^{m} a_k \right| \leqslant |S_i - L| + \left| \sum_{k=N_i+1}^{N_i+p} a_k \right| \tag{4.4.52}$$

令 $m \to \infty$，则 $i \to \infty, k \to \infty$，此时 $\left|\sum_{k=N_i+1}^{N_i+p} a_k\right| \to 0$，也即

$$|T_m - L| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \tag{4.4.53}$$

也即 $T_m \to L, m \to \infty$，故级数 $\sum a_n$ 收敛.

□

题目 4.4.9. 证明级数 $\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

证明. 当 $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - 1, k \in N^*$ 时，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$. 考虑如下级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^k}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \tag{4.4.54}$$

考虑 $\left|\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^k}{n}\right|$. 由于

$$\left| \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^k}{n} \right| = \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} - \frac{1}{k^2+3} + \cdots + \frac{(-1)^{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1} \right| \tag{4.4.55}$$

由于相邻两项（1,2 项，3,4 项等等）之和为正，无论最后一项是正数还是负数，上述绝对值可直接去掉（不过由于 $(k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$，则 $(-1)^{k^2+2k} = (-1)^{k^2}$ 和第一项的正负号一致）.

因此

$$\left| \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^k}{n} \right| = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} - \frac{1}{k^2+3} + \cdots + \frac{(-1)^{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1} \leqslant \frac{2k+1}{k^2(k^2+1)} \leqslant \frac{2}{k^2} \tag{4.4.56}$$

那么

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^k}{n}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}\tag{4.4.57}$$

故级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^k}{n}$ 绝对收敛，因此收敛. 也即级数 $\sum\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛. □

注: 在不知道原级数的敛散性的前提下，不能写 $\sum\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^k}{n}$. 这是因为我们将原级数进行了分组求和，也就是**加括号！**如果加完括号的级数收敛，我们是无法判断原级数是收敛还是发散的，因此不能直接写等号. 上面我们使用了4.4.5（定理 4.4.6）的第 (2) 条件.

题目 4.4.10. 证明 $\alpha\beta>1,\alpha\in N^*$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt[\alpha]{n}\rfloor}}{n^\beta}$ 收敛.

证明. 当 $k^\alpha\leqslant n\leqslant(k+1)^\alpha-1,k\in N^*$ 时，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor=k$. 考虑级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^\alpha}^{(k+1)^\alpha-1}\frac{(-1)^{n+k}}{n^\beta}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum_{n=k^\alpha}^{(k+1)^\alpha-1}\frac{(-1)^n}{n^\beta}\tag{4.4.58}$$

对于任意的 $1\leqslant m<(k+1)^\alpha-1$，有

$$\left|\sum_{n=k^\alpha}^{k^\alpha+m}\frac{(-1)^n}{n^\beta}\right|=\left|\frac{1}{k^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(k^\alpha+1)^\beta}+\frac{1}{(k^\alpha+2)^\beta}-\frac{1}{(k^\alpha+3)^\beta}+\cdots+\frac{(-1)^{k^\alpha+m}}{(k^\alpha+m)^\beta}\right|\tag{4.4.59}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{k^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(k^\alpha+1)^\beta}\right](m+1)\leqslant\left[\frac{1}{k^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(k^\alpha+1)^\beta}\right][(k+1)^\alpha-k^\alpha]\tag{4.4.60}$$

$$\leqslant\frac{M_1k^{\alpha(\beta-1)}}{k^{2\alpha\beta}}\cdot M_2k^{\alpha-1}=\frac{M}{k^{\alpha+1}}\to 0(n\to\infty)\tag{4.4.61}$$

那么 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum_{n=k^\alpha}^{(k+1)^\alpha-1}\frac{(-1)^n}{n^\beta}$ 绝对收敛，以及余项一致收敛于 0，因此原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt[\alpha]{n}\rfloor}}{n}$ 收敛. □

注: 上面我们使用了4.4.5（定理 4.4.6）的第 (3) 条件.

题目 4.4.11. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}$ 的敛散性.

解: 对于第一个级数，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n-(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2-1}\tag{4.4.62}$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}$ 收敛（Leibniz 判别法），以及 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2-1}$ 绝对收敛，知第一个级数收敛.

对于第二个级数，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(-1)^n-(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n-1} \tag{4.4.63}$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(-1)^n}{n-1}$ 收敛（Leibniz 判别法），以及 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n-1}$ 收敛，故第二个级数收敛.

4.5 一些常见的误区

Q: 级数上标的无穷到底指的是什么？

A: 级数的定义为 $\lim_{n\to\infty}S_n$，上标只是一个形式，这种趋于无穷的过程，还是需要转为数列极限来看.

Q: 级数求和的上标为什么是 n，不能是 n^2 或 $\sqrt{n}$ 吗？

A: 上标是 n 是由定义所致，级数的定义为 $\lim_{n\to\infty}S_n$，其中 S_n 为级数的部分和. 如果改为其它的上标，例如 n^2，那么 $S_{n^2}=S_n+(S_{n^2}-S_n)$，这说明在 S_n 和 S_{n^2} 中还存在许多项，这已经不再是原级数了. 我将从两个方面详细阐述：

1. 数列极限方面：对于一个数列 S_n，我们知道，如果它的一个子列收敛（例如 S_{2n}），我们是无法推出原数列收敛的. 那 S_{n^2} 是什么呢？其实也是 S_n 的一个子列，因为如果我们把 S_{n^2} 写开，会发现它是

$$S_1,S_4,S_9,S_{16},S_{25},S_{36},\cdots,S_{n^2},\cdots \tag{4.5.1}$$

确实是 S_n 的一个子列，因此 S_{n^2} 收敛，无法推出 S_n 收敛，也无法推出 $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 收敛. 但是如果我们能够证明 $\lim_{n\to\infty}(S_{n^2+k}-S_{n^2})=0,0\leqslant k\leqslant 2n$ 一致成立（即固定 n 后，对任意的 k 都一致成立），那数列 S_n 收敛.

对于子列收敛，但原数列不收敛的例子有很多，读者可以以奇偶子列为例举个不成立的例子.

现在考虑这个问题，如果 $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 收敛，那么 S_n 和 S_{n^2} 也收敛吗？

事实上，S_n 和 S_{n^2} 是 $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 的子列. 这是因为 $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 可以写成

$$S_1,S_1,S_1,S_2,S_2,S_2,S_2,S_2,S_3,\cdots \tag{4.5.2}$$

若 S_n 收敛，那么 S_{n^2} 一定收敛（子列），那么 $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 呢？我们直接考虑不太容易，不过可以使用 Cauchy 收敛准则，我们知道 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，对任意 $n>N$ 及任意 $p\in N^*$，都有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon \tag{4.5.3}$$

如果取 $N'=N^2$，则 $n>N'>N$ 时，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor>N$，因此

$$\left|S_{\lfloor\sqrt{n+p}\rfloor}-S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right|=\left|S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+p}-S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right|<\varepsilon \tag{4.5.4}$$

也即 $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ 收敛.

2. 级数方面：在 $a_n \to 0\ (n\to\infty)$ 的前提下，我们讨论下面三个表达式的区别与联系：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} a_k \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2} a_k \tag{4.5.5}$$

事实上，如果我们令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，则结论和第一部分一致，也即：

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2} a_k = L \\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} a_k = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2} a_k = L \\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2} a_k = L \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} a_k \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{convergence}\end{gathered} \tag{4.5.6}$$

这说明上标并不能随便改，要根据实际情况具体判断.

Q: 如果对分组后的级数前 $m(n)$ 项极限存在，且项数有限可以去括号，那不就不需要定理 4.4.6 了吗？

A: 一般情况下，我们无法这样操作，这是因为不一定都成立（存在这样的 $m(n)$），除非你能取一个刚好与原级数等价的前 $m(n)$ 项. 例如，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$，如果能证明 $b_k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{(-1)^k}{n}$ 的前 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 项再取极限，但我们无法说原极限存在，

事实上，最主要的问题在于，如果你能证明 $\sum b_k$ 收敛，那么我们就知道 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1} b_k$ 收敛，但

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1} b_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}\sum_{j=k^2}^{k^2+2k}\frac{(-1)^k}{j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)^2} a_k \tag{4.5.7}$$

它并不是级数 $\sum a_n$ 的前 $n-1$ 项和，这是因为 $\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)^2\neq n$！当 $k^2\leqslant n<(k+1)^2$ 时，它们最多能差 $2k\sim 2\sqrt{n}$ 个数量级，并不和原级数等价.

Q: 级数改上标与数列改下标的区别是什么？

A: 数列改下标，本质上是产生了一个新的数列，新的数列通项已经发生了改变（如果令 $b_n=a_{f(n)}$）. 但级数改上标，以整体的视角来看，只是把求和的项数更改了，求和的数列并没有改变；如果以前 n 项和 S_n 这个数列视角来看，我们更改了 S_n 的通项.

第 5 章　反常积分

对于 Riemann 定积分，我们一般处理的被积函数是连续有界函数，积分区间一般也是有界的，即 $\int_a^b f(x)dx$. 但是，有两类反常积分，一类是积分区间无界（到 ∞），一类是被积函数在积分区间上不连续，因此它们都有可能发散. 对于这两类积分，我们使用相应的敛散性判别法，判断它们的敛散性.

5.1　无穷限反常积分和瑕积分

定义 5.1.1：　无穷限反常积分

对于定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$，且在任意有限区间 $[a, u]$ 上 Riemann 可积，如果存在极限

$$\lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x)dx = J \tag{5.1.1}$$

那么我们就称 J 为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的无穷限反常积分，记作

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{5.1.2}$$

且此时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 如果 J 不存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

我们可类似定义积分区间为 $(-\infty, b]$ 的无穷积分：

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^b f(x)dx \tag{5.1.3}$$

对于积分区间为 $(-\infty, +\infty)$ 的无穷积分，我们可以把它拆成两个无穷积分去考虑：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{5.1.4}$$

我们说 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，当且仅当对任意的有限数 a，$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛.

类似于定积分，无穷限反常积分也有形式上的 Newton-Leibniz 公式. 例如，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x)dx = \lim_{u \to +\infty} (F(u) - F(a)) = F(+\infty) - F(a) \tag{5.1.5}$$

其中 $F(+\infty) = \lim_{u \to +\infty} F(u)$ 只是一个记号.

类似地，

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{v \to -\infty} \int_v^a f(x)dx = \lim_{v \to -\infty} (F(a) - F(v)) = F(a) - F(-\infty) \tag{5.1.6}$$

其中 $F(-\infty)=\lim_{v\to-\infty}F(u)$ 只是一个记号.

那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=F(a)-F(-\infty)+F(+\infty)-F(a)=F(+\infty)-F(-\infty) \tag{5.1.7}$$

题目 5.1.1. 讨论无穷 p 积分的敛散性，即

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \tag{5.1.8}$$

解: 1^o 当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{1}{x}dx=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ 发散.

2^o 当 $p\neq1$ 时，

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{u\to+\infty}\int_{1}^{u}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=\begin{cases}0 & ,p>1\\ +\infty & ,p<1\end{cases} \tag{5.1.9}$$

综上，对于无穷 p 积分，$p>1$ 时收敛，$p\leqslant1$ 时发散.

题目 5.1.2. 判断反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}$ 的敛散性.

解:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{u\to\infty}\int_{0}^{u}\frac{1}{1+x^2}dx \tag{5.1.10}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\arctan x|_0^u=\arctan x|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2} \tag{5.1.11}$$

故收敛.

题目 5.1.3. 判断反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}$ 的敛散性.

解:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}=\arctan x|_{-\infty}^{+\infty}=\pi \tag{5.1.12}$$

故收敛.

除了无穷限反常积分，我们还有一种反常积分，称为瑕积分.

定义 5.1.2： 瑕积分

对于定义在 $(a,b]$ 上的函数 $f(x)$，在 a 的右邻域内无界，但在其任意子区间 $[u,b], u>a$ 上均有界且 Riemann 可积，如果存在极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx = J \tag{5.1.13}$$

那么我们就称 J 为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的瑕积分，记作

$$J=\int_a^b f(x)dx \tag{5.1.14}$$

且此时称 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 如果 J 不存在，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

仿照上述定义，我们可以类似定义在 $[a,b)$，且在 b 的左邻域无界的瑕积分：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)dx \tag{5.1.15}$$

以及在两端点的邻域内均无界的瑕积分，即 (a,b)：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{u\to a^+}\int_u^c f(x)dx+\lim_{v\to b^-}\int_c^v f(x)dx \tag{5.1.16}$$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则上面三式亦写为统一的形式：

$$\int_a^b f(x)dx=F(b-0)-F(a+0) \tag{5.1.17}$$

其中 $F(b-0)$ 表示 $F(x)$ 在 b 的左极限，$F(a+0)$ 表示 $F(x)$ 在 a 的右极限.[1]

一个经典的例子，就是讨论瑕积分 p 积分的敛散性.

题目 5.1.4. 讨论 $(0,1]$ 区间上的 p 积分的敛散性，即

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \tag{5.1.18}$$

解： 1^o 当 $p=1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x}dx=\lim_{u\to 0^+}\int_u^1\frac{1}{x}dx=-\lim_{u\to 0^+}\ln u=+\infty$ 发散.

2^o 当 $p\neq 1$ 且 $p>0$ 时，

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\lim_{u\to 0^+}\int_u^1\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}-\lim_{u\to 0^+}\frac{u^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}+\infty & ,p>1\\ 0 & ,0<p<1\end{cases} \tag{5.1.19}$$

[1] 如果 b 点左极限存在，那么 $F(b-0)=F(b)$，同理若 a 点右极限存在，那么 $F(a+0)=F(a)$.

3^o 当 $p \leqslant 0$ 时，原积分不是瑕积分，故收敛. 综上，对于原积分，$p \geqslant 1$ 时发散，$p < 1$ 时收敛.

无穷限反常积分可以和瑕积分相互转化. 我们以无穷 p 积分为例.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^0 t^p \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$$

那么 $2-p \geqslant 1$，即 $p \leqslant 1$ 时原积分发散；$2-p < 1$，即 $p > 1$ 时原积分发散.

这两类反常积分是非常重要的积分，尤其是 p 积分. 如果容易记混淆，可以先记 $p=1$ 时发散，然后代入 $p=0$ 看看是收敛还是发散的. 如果收敛，则 $p<1$ 收敛，否则发散.

5.2 无穷限反常积分敛散性判别法

对于一些能够“积出来”的反常积分，我们可以按照定义取极限判断其敛散性. 但有时候，积分表达式没有初等表示，如 $\int e^{x^2} dx$，$\int \frac{\ln x}{x} dx$ 等，虽然它们的原函数确实存在，甚至反常积分能求出来，但是我们一般不按照定义去做了. 这启示我们，找到反常积分敛散性判别法是必要的. 由于反常积分和级数的相似性，我们可以使用类似级数敛散性判别法的方法找到反常积分敛散性判别法.

5.2.1 无穷限反常积分的性质

首先，由于我们是通过极限判断反常积分是否收敛的，因此我们可以使用 Cauchy 收敛准则，对反常积分的敛散性进行判断.

定理 5.2.1： 无穷限反常积分的 Cauchy 收敛准则

无穷限反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, 当 $u_1, u_2 > X$ 时，有

$$\left|\int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{5.2.1}$$

当取 $u_2 = u_1 + p, u_1 = u$ 时，定理即为：$\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, 当 $u > X$ 时，对 $\forall p \geqslant 0$ 有

$$\left|\int_a^{u+p} f(x)dx - \int_a^{u} f(x)dx\right| = \left|\int_{u}^{u+p} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{5.2.2}$$

证明. $(\Rightarrow)$ 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时，即 $\lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)dx$ 收敛，因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, 当 $u_1, u_2 > X$ 时，有

$$\left|\int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{5.2.3}$$

$(\Leftarrow)$ 令 $h(u) = \int_a^u f(x)dx$，则由已知，$\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, 当 $u_1, u_2 > X$ 时，有 $|h(u_1) - h(u_2)| < \varepsilon$，因此 $h(u)$ 收敛，即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. □

在 Cauchy 收敛准则中，令 $p \to +\infty$，则 $\left|\int_u^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$. 又由

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^{+\infty} f(x)dx \tag{5.2.4}$$

故知，当 $u > X$，且 $\left|\int_u^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$ 时，$\int_a^u f(x)dx$ 可看做定积分. 故此时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的另一个充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, 当 $u > X$ 时，有 $\left|\int_u^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

类似于级数中的定义，反常积分也有绝对收敛和条件收敛一说.

定义 5.2.1： 无穷限反常积分的绝对收敛与条件收敛

若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **绝对收敛**；若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **条件收敛**.

定理 5.2.2

若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a, u]$ 上 Riemann 可积，且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

提示: 我们只需使用 Cauchy 收敛准则，以及三角不等式即可证明.

证明. 已知 $\lim_{u\to+\infty} \int_a^u |f(x)|dx$ 收敛，那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, 当 $u > X$ 时，对 $\forall p \geqslant 0$ 有

$$\left|\int_a^{u+p} |f(x)|dx - \int_a^u |f(x)|dx\right| = \left|\int_u^{u+p} |f(x)|dx\right| < \varepsilon \tag{5.2.5}$$

但

$$\left|\int_a^{u+p} f(x)dx - \int_a^u f(x)dx\right| = \left|\int_u^{u+p} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int_u^{u+p} |f(x)|dx\right| < \varepsilon \tag{5.2.6}$$

故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. □

5.2.2 非负函数无穷限反常积分敛散性判别法

设 $f(x) \geqslant 0$，那么无穷限反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 称为非负函数的无穷限反常积分. 类似于数项级数的正项级数部分，非负函数的无穷限反常积分也有类似的判别法.

定理 5.2.3： 比较原则

设 $f(x), g(x)$ 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且内闭 Riemann 可积（即在任意的 $[m,n] \subset [a,+\infty)$ 内 Riemann 可积），且满足

$$f(x) \leqslant g(x), x \geqslant a \tag{5.2.7}$$

那么：
(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；
(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

提示：使用 Cauchy 收敛准则即可证明.

题目 5.2.1. 判断下述级数的敛散性：
(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ (2) $\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$

解： (1) 考虑加了绝对值的积分，我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2}dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} \tag{5.2.8}$$

故原无穷积分绝对收敛，因此原积分收敛.

(2) 由于被积函数非负，且

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}dx \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}dx \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \tag{5.2.9}$$

收敛.

类似地，对于非负函数无穷积分的敛散性判别法，我们也有比较原则的极限形式.

推论 5.2.1： 比较原则的极限形式

设函数 f, g 在 $[a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积，$f(x) \geqslant 0, g(x) > 0$，且 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$，则：
(1) 当 $0 < c < +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散；
(2) 当 $c = 0$ 时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；
(3) 当 $c = +\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散时，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

题目 5.2.2. 讨论下述反常积分的敛散性：(1) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ (2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$

解： (1) 考虑与 $\frac{1}{x^2}$ 进行比较. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0 \tag{5.2.10}$$

则原反常积分收敛；

(2) 考虑与 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 进行比较. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/2}}{\sqrt{x^5+1}}=1 \tag{5.2.11}$$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 发散，故原反常积分发散.

5.2.3 一般函数无穷限反常积分敛散性判别法

对于一般函数（不规定正负）的无穷限反常积分敛散性，也有类似的 Abel-Dirichlet 判别法.

定理 5.2.4： Dirichlet 判别法

若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0，那么 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明. 由条件，知 $\left|\int_a^u f(x)dx\right|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0,\exists X>a$，当 $x>X$ 时，有 $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$.

由于 $g(x)$ 单调，故可使用积分第二中值定理，对于任意 $u_2>u_1>X$，存在 $\xi\in[u_1,u_2]$，使得

$$\int_{u_1}^{u_2}f(x)g(x)dx=g(u_1)\int_{u_1}^{\xi}f(x)dx+g(u_2)\int_{\xi}^{u_2}f(x)dx \tag{5.2.12}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)g(x)dx\right|\leqslant|g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{\xi}f(x)dx\right|+|g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{u_2}f(x)dx\right|\\&=|g(u_1)|\cdot\left|\int_a^{\xi}f(x)dx-\int_a^{u_1}f(x)dx\right|+|g(u_2)|\cdot\left|\int_a^{u_2}f(x)dx-\int_a^{\xi}f(x)dx\right|\\&<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛. □

定理 5.2.5： Abel 判别法

若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，那么 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明方法同上，只不过这时候把方式的上界对换一下即可，即使用 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的 Cauchy 准则加以证明.

题目 5.2.3. 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$，$p>0$ 时的敛散性.

解： $(1)1^o$,$p>1$ 时绝对收敛.

2^o,$0<p\leqslant 1$ 时，$\int_1^u \sin x dx \leqslant 2$，以及 $\frac{1}{x^p}$ 当 $x\to+\infty$ 时单调递减趋于 0. 由 Dirichlet 判别法知原反常积分收敛.

(2)1^o,$p>1$ 时绝对收敛.

2^o,$0<p\leqslant 1$ 时，由于

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx \tag{5.2.14}$$

第一部分发散，第二部分收敛，故原反常积分发散.

虽然反常积分和级数很相似，但也不是所有的结论都能照搬过来. 例如在级数中，级数收敛的必要条件是通项的极限为 0，即若级数 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 但在反常积分中，这个性质不一定成立，这是因为积分的变化较多，比如三角代换，区间再现，倒代换等，都会改变被积函数的性态，从而导致结论不成立.

题目 5.2.4. 证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，且 $f(x)$ 连续，但不一定有 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

解： 考虑 $\int_1^{+\infty}\sin x^2dx$，显然当 $x\to+\infty$ 时，被积函数不趋于 0. 但如果我们做变换 $t=x^2$，则

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx\overset{t=x^2}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt \tag{5.2.15}$$

由 Dirichlet 判别法知原反常积分收敛.

由上述题目可知，题目条件较弱. 如果我们再添加一些条件，就能使得被积函数极限为 0.

题目 5.2.5. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭 Riemann 可积，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，证明：当 $f(x)$ 再满足下面的任意一个条件时，有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

(1)$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在；

(2)$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调. 进一步，我们可推出 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$；

(3)$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可导，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)dx$ 也收敛；

(4)$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续；

(5)$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 连续；

(6)$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且导函数有界.

证明. (1) 反证法，设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\neq 0$.

若 $A>0$，则 $\exists M>0$，当 $x>M$ 时，有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$. 则

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^M f(x)dx+\int_M^{+\infty}f(x)dx>\int_a^M f(x)dx+\int_M^{+\infty}\frac{A}{2}dx=+\infty \tag{5.2.16}$$

矛盾！

若 $A<0$，则 $\exists M>0$，当 $x>M$ 时，有 $f(x)<\frac{A}{2}>0$. 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^M f(x)dx+\int_M^{+\infty} f(x)dx<\int_a^M f(x)dx+\int_M^{+\infty}\frac{A}{2}dx=-\infty \tag{5.2.17}$$

矛盾！

综上，假设不成立，则 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A=0$.

(2) **首先证明** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. 不妨设 $f(x)$ 单调递减（单调递增类似），则有两种情况：1.$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,2.$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$.

对于第 2 种情况，我们已在 (1) 中证明 $A=0$，故只需就第一种情况加以讨论. 由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，知 $\exists M>0$，当 $x>M$ 时，有 $f(x)\leqslant f(x_0)<0$. 但

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^M f(x)dx+\int_M^{+\infty} f(x)dx<\int_a^M f(x)dx+\int_M^{+\infty} f(x_0)dx=-\infty \tag{5.2.18}$$

矛盾！故这种情况不会出现. 因此 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

下面证明 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$. 不妨设 $f(x)$ 单调递减（单调递增类似），则 $f(x)\geqslant 0$. 由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，知 $\forall\varepsilon>0,\exists M>a$，当 $x>2M$ 时，有

$$\frac{\varepsilon}{2}>\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\geqslant\frac{x}{2}f(x)\quad(Cauchy) \tag{5.2.19}$$

故 $0<xf(x)<\varepsilon$，即 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(3) 已知

$$-\infty<\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f'(x)dx=\lim_{u\to+\infty}[f(u)-f(a)]=\lim_{u\to+\infty} f(u)-f(a)<+\infty \tag{5.2.20}$$

即 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 收敛，由 (1) 知 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(4) 由 $f(x)$ 的一致连续性，知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对任意 $u_1,u_2\in[a,+\infty)$，当 $|u_1-u_2|<\delta$ 时，有

$$|f(u_1)-f(u_2)|<\varepsilon \tag{5.2.21}$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则存在 $M>0$，使得 $x>M$ 时，有 $\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|<\delta\varepsilon$.

当 $x<t<x+\delta$ 时，有 $f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon$(一致收敛性).

故

$$\int_x^{x+\delta} f(t)dt-\delta\varepsilon\leqslant\int_x^{x+\delta} f(x)dt\leqslant\int_x^{x+\delta} f(t)dt+\delta\varepsilon \tag{5.2.22}$$

那么 $\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt-\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|\leqslant\delta\varepsilon$.

当 $x>M$ 时，

$$|f(x)|=\frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt\right|\leqslant\frac{1}{\delta}\left[\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt-\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|+\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|\right]<2\varepsilon \tag{5.2.23}$$

故 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

(5),(6) 均可推出 (4)，故成立. 证毕. $\square$

当然 (4) 的证明也可以使用反证法，这里不再叙述.

反常积分收敛，甚至不能推出被积函数有界（但在 Riemann 积分中成立），因此对待反常积分，需要更加谨慎.

5.3 瑕积分的敛散性判别法

瑕积分和无穷限反常积分有很多共同之处，它们之间能够相互转化，因此瑕积分的性质、敛散性判别法和无穷限反常积分很相似.

5.3.1 瑕积分的性质

定理 5.3.1： 瑕积分的 Cauchy 收敛准则

设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的瑕点为 a，则其收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$，总有

$$\left|\int_{u_1}^a f(x)dx-\int_{u_2}^b f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon \tag{5.3.1}$$

瑕积分也有积分可加性. 设 f_1,f_2 的瑕点均为 a，则当 $\int_a^b f_1(x)dx$ 和 $\int_a^b f_2(x)dx$ 均收敛时，对任意 k_1,k_2，都有 $k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx$ 也收敛，且

$$k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx=k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx \tag{5.3.2}$$

同样的，瑕积分也有绝对收敛和条件收敛.

定义 5.3.1： 绝对收敛和条件收敛

设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的瑕点为 a，若 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 收敛，则称原瑕积分**绝对收敛**. 且此时 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛，并且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx \tag{5.3.3}$$

若 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 发散，但 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，则称为**条件收敛**.

无穷限反常积分的结论可以平移到瑕积分里：

定理 5.3.2： 比较原则

设 $f(x),g(x)$ 为定义在 $(a,b]$ 上的非负函数，瑕点均为 $x=a$，且内闭 Riemann 可积（即在任意的 $[m,n]\subset(a,b]$ 内 Riemann 可积），且满足

$$f(x)\leqslant g(x),x\in(a,b] \tag{5.3.4}$$

那么：
(1) 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；
(2) 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时，$\int_a^b g(x)dx$ 发散.

推论 5.3.1： 比较原则的极限形式

设函数 f,g 在 $[a,b)$ 上内闭 Riemann 可积，$f(x)\geqslant 0,g(x)>0$，且 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c$，则：
(1) 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散；
(2) 当 $c=0$ 时，$\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；
(3) 当 $c=+\infty$ 时，$\int_a^b g(x)dx$ 发散时，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

对于一般函数（不规定正负）的瑕积分敛散性，也有类似的 Abel-Dirichlet 判别法.

定理 5.3.3： Dirichlet 判别法

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 若 $F(u)=\int_u^b f(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上有界，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且 $\lim_{x\to a^+}g(x)=0$，那么 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理 5.3.4： Abel 判别法

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界，那么 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

当然也有同时为瑕积分和反常积分的情况，这时候我们只需把它分为瑕积分和反常积分即可.

题目 5.3.1. 判断反常积分 $\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的敛散性.

由于 $\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=I(\alpha)+J(\alpha)$, 只需分别讨论 $I(\alpha)$ 和 $J(\alpha)$ 的敛散性即可. 不过这里我们换种思路，我们之前说过无穷积分和瑕积分可以相互转换，因此我们也可以尝试把 $I(\alpha)$ 和 $J(\alpha)$ 联系起来.

解： 由

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t^2}dt=\int_0^1\frac{t^{-\alpha}}{t+1}dt=\int_0^1\frac{x^{-\alpha}}{x+1}dx \tag{5.3.5}$$

故 $-\alpha<0$ 且 $\alpha-1<0$，即 $0<\alpha<1$ 时收敛，其余情况均发散.